

BAB 2

Matriks

Apakah yang akan anda pelajari?

- Matriks
- Operasi Asas Matriks

Maslahat Bab Ini

Matriks digunakan dalam bidang matematik untuk mewakili dan menyelesaikan masalah dalam algebra, statistik dan geometri. Dalam kehidupan harian, seorang pengurus belian boleh mencatat jumlah inventori dalam perniagaan.

Tahukah Anda?

Arthur Cayley (1821-1895) seorang ahli matematik Inggeris yang membangunkan teori matriks dari aspek algebra dalam karyanya *A Memoir on the Theory of Matrices*. Cayley mencipta matriks semasa membuat kajian tentang teori transformasi. Dua orang ahli matematik Amerika Syarikat, Benjamin Peirce (1809-1880) dan Charles S. Peirce (1839-1914) turut bersama-sama Cayley dalam pembangunan matriks algebra.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab2

GERBANG ISTILAH



matriks
matriks baris
matriks identiti
matriks lajur
matriks segi empat sama
matriks segi empat tepat
matriks sifar
matriks songsang
pendaraban skalar
penentu
peringkat
unsur

matrix
row matrix
identity matrix
column matrix
square matrix
rectangular matrix
zero matrix
inverse matrix
scalar multiplication
determinant
order
element



Mengikut Laporan Digital 2018, jumlah pengguna Internet mencatatkan 25.08 juta orang iaitu 79% penduduk di Malaysia. Masyarakat kini lebih cenderung menjalani urusan seharian seperti membeli-belah, membuat bayaran perkhidmatan dan sebagainya melalui Internet. Pelbagai data telah dihasilkan dalam proses ini dan menyokong pertumbuhan Data Raya (*Big Data*).

Data Raya merujuk kepada data yang bersaiz sangat besar, kompleks dan sukar diproses dengan pengurusan pangkalan data biasa. Koleksi data ini dapat membantu pihak pengurusan pelbagai bidang untuk membuat keputusan yang lebih bijak. Dalam bidang perniagaan, data raya dianalisis untuk mengurangkan kos dan masa, membangunkan produk baharu serta menyusun langkah-langkah perniagaan yang strategik. Proses menganalisis data ini banyak melibatkan matriks.

2.1 Matriks

Bagaimanakah mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks?

Kedai Elektrik Sinar Jaya mencatatkan jualan tiga jenis kipas angin dengan menggunakan hamparan elektronik. Rajah di bawah menunjukkan jualan kipas angin di kedai dan dalam talian bagi bulan Mac hingga Mei. Bagaimanakah data ini boleh disusun?

Standard Pembelajaran

Mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Jualan kipas angin bulan Mac				Jualan kipas angin bulan April				Jualan kipas angin bulan Mei		
2		Kipas Angin				Kipas Angin				Kipas Angin		
3		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding
4	Di kedai	16	18	11		20	15	9		15	21	10
5	Dalam talian	5	10	4		7	12	5		10	24	10
6												
7		Jumlah jualan bulan Mac dan April				Perbezaan jualan bulan April dan Mei						
8		Kipas Angin				Kipas Angin						
9		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding				
10	Di kedai	36	33	20		-5	6	1				
11	Dalam talian	12	22	9		3	12	5				
12												

Data bulan Mac yang diwakili dalam bentuk jadual boleh juga diwakili dalam bentuk matriks seperti yang ditunjukkan di bawah.

	Kipas Angin		
	Berdiri	Siling	Dinding
Di kedai	16	18	11
Dalam talian	5	10	4

Bentuk jadual

$$\text{baris} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑
lajur

Bentuk matriks

Matriks ialah nombor-nombor yang disusun dalam baris dan lajur untuk membentuk satu tatasusunan segi empat tepat atau segi empat sama.

Matriks lazimnya diwakili dengan huruf besar dan ditulis dalam tanda kurung [] atau ().



Khazanah Silam



James Joseph Sylvester (1814-1897) merupakan ahli matematik yang pertama kali menggunakan istilah matriks pada tahun 1850.

Contoh 1

Wakikan maklumat berikut dalam bentuk matriks.

(a) Jadual di bawah menunjukkan keperluan kalori harian bagi perempuan mengikut kategori.

	Kanak-kanak	Remaja	Dewasa	Warga Emas
Keperluan kalori harian (kcal)	1 700	2 100	2 000	1 800

(b) Jadual di bawah menunjukkan pungenan pingat oleh kontinjen Malaysia untuk tiga acara dalam Temasya Sukan SEA ke-29.

	Emas	Perak	Gangsa
Acara Terjun	13	5	1
Pencak Silat	10	2	4
Olahraga	8	8	9

(c) Dalam Ujian 1, Samad telah mendapat 76 markah untuk Bahasa Melayu, 82 markah untuk Matematik dan 72 markah untuk Sejarah. Hamid pula telah mendapat 80 markah untuk Bahasa Melayu, 88 markah untuk Matematik dan 70 markah untuk Sejarah.

Penyelesaian:

(a) baris 1 $\rightarrow$ $[1700 \ 2100 \ 2000 \ 1800]$ atau $\begin{bmatrix} 1700 \\ 2100 \\ 2000 \\ 1800 \end{bmatrix}$

Ini matriks baris. Matriks baris mempunyai hanya satu baris.

lajur 1

Ini matriks lajur. Matriks lajur mempunyai hanya satu lajur.

(b) baris 1 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 13 & 10 & 8 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$
 baris 2 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
 baris 3 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

lajur 1 lajur 2 lajur 3

Ini matriks segi empat sama. Matriks segi empat sama mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang sama.

(c) baris 1 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 76 & 80 \end{bmatrix}$ atau baris 1 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 76 & 82 & 72 \end{bmatrix}$
 baris 2 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 82 & 88 \end{bmatrix}$ baris 2 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 80 & 88 & 70 \end{bmatrix}$
 baris 3 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 72 & 70 \end{bmatrix}$ lajur 1 lajur 2 lajur 3

Ini matriks segi empat tepat. Matriks segi empat tepat mempunyai bilangan baris dan bilangan lajur yang berbeza.

Buletin Ilmiah

Kalori ialah ukuran nilai tenaga dalam makanan. Kandungan kalori suatu makanan bergantung pada kandungan karbohidrat, protein dan lemak di dalamnya. Misalnya, 1 g protein bersamaan 4 kcal.

Oh! Malaysiaku

KUALA LUMPUR 2017

Dalam Temasya Sukan SEA ke-29 yang diadakan di Kuala Lumpur pada tahun 2017, kontinjen Malaysia berjaya menjadi juara keseluruhan dengan pencapaian 145 pingat emas.

Minda Kritis

Adakah [6] merupakan matriks segi empat sama? Jelaskan jawapan anda.



1. Suatu pameran teknologi mudah alih generasi kelima (5G) telah dikunjungi oleh 857 orang remaja, 3 180 orang dewasa dan 211 orang warga emas. Wakilkan maklumat tersebut dalam bentuk matriks.

2. Jadual di sebelah menunjukkan purata bacaan Indeks Pencemaran Udara (IPU) di Putrajaya, Jerantut dan Sandakan selama tiga hari. Wakilkan maklumat tersebut dalam bentuk matriks.

	Isnin	Selasa	Rabu
Putrajaya	53	52	50
Jerantut	20	21	20
Sandakan	47	48	46

3. Jadual di bawah menunjukkan purata bilangan buku yang dibaca oleh murid dalam Program Nilam di SMK Setia bagi tahun 2019.

	Tingkatan 3	Tingkatan 4	Tingkatan 5
Bahasa Melayu	20	18	15
Bahasa Inggeris	12	10	11

Wakilkan maklumat di atas dalam bentuk matriks.



Bagaimanakah menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam matriks?

Peringkat matriks boleh ditentukan dengan menulis bilangan baris dan bilangan lajur matriks itu. Misalnya,

$$\begin{array}{l} \text{baris 1} \rightarrow \\ \text{baris 2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$\uparrow$ lajur 1 $\uparrow$ lajur 2 $\uparrow$ lajur 3

Matriks ini mempunyai 2 baris dan 3 lajur. Jadi, ini ialah matriks peringkat 2×3 dan dibaca sebagai “matriks 2 dengan 3”.

Standard Pembelajaran

Menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam suatu matriks.

Matriks dengan m baris dan n lajur mempunyai peringkat $m \times n$ dan dibaca sebagai “matriks m dengan n ”.

Setiap nombor dalam matriks dikenali sebagai **unsur** matriks itu. Misalnya, unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 bagi matriks $\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ialah 4.

Huruf besar digunakan untuk mewakili suatu matriks, misalnya $A = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, dan unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-3 boleh diwakili dengan a_{23} , misalnya $a_{23} = 4$.

Secara umumnya, unsur pada baris ke- i dan lajur ke- j dalam matriks A boleh diwakili oleh



$$\text{maka, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Buletin Ilmiah

a_{21} dibaca sebagai "a dua satu"

Buletin Ilmiah

Matriks baris mempunyai peringkat $1 \times n$ manakala matriks lajur mempunyai peringkat $m \times 1$.

Contoh 2

Diberi tiga matriks, $P = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ -4 & 11 & 6 & 1 \\ 9 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan

- peringkat setiap matriks itu,
- unsur
 - baris pertama dan lajur ke-3 matriks P , p_{13} ,
 - baris ke-2 dan lajur pertama matriks Q , q_{21} ,
 - baris ke-3 dan lajur ke-4 matriks R , r_{34} .

Penyelesaian:

- Peringkat matriks P ialah 1×3 .
Peringkat matriks Q ialah 2×1 .
Peringkat matriks R ialah 4×4 .
- p_{13} bagi matriks P ialah 9.
 - q_{21} bagi matriks Q ialah 5.
 - r_{34} bagi matriks R ialah 1.

$$\begin{array}{ccc} \text{baris 1} \rightarrow & \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \end{bmatrix} \\ & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ & \text{lajur 1} \quad \text{lajur 2} \quad \text{lajur 3} \end{array}$$

Matriks ini mempunyai 1 baris dan 3 lajur.

Contoh 3

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$, tentukan

- peringkat matriks,
- unsur d_{11} , d_{21} dan d_{32} .

Penyelesaian:

- 3×2
- $d_{11} = -2$ ← d_{11} ialah unsur pada baris pertama dan lajur pertama.
 $d_{21} = 0$ ← d_{21} ialah unsur pada baris ke-2 dan lajur pertama.
 $d_{32} = 9$ ← d_{32} ialah unsur pada baris ke-3 dan lajur ke-2.



Khazanah Silam

Cuthbert Edmund Cullis (1875-1954) ialah seorang ahli matematik Inggeris yang memperkenalkan kurungan untuk matriks pada tahun 1913. Cullis menggunakan tatatanda $A = [a_{ij}]$ untuk mewakili unsur pada baris ke- i dan lajur ke- j dalam matriks.

1. Tentukan peringkat bagi matriks-matriks berikut.

(a) $[15 \quad -8]$ (b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 12 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

2. Untuk setiap matriks berikut, tentukan

- (i) peringkat matriks,
(ii) unsur pada baris ke-2 dan lajur ke-2,
(iii) unsur pada baris ke-3 dan lajur pertama.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 16 & 0 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $F = \begin{bmatrix} -8 & 14 & 2 \\ 7 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, tentukan peringkat matriks F . Kemudian, kenal pasti unsur f_{13} , f_{22} dan f_{11} .

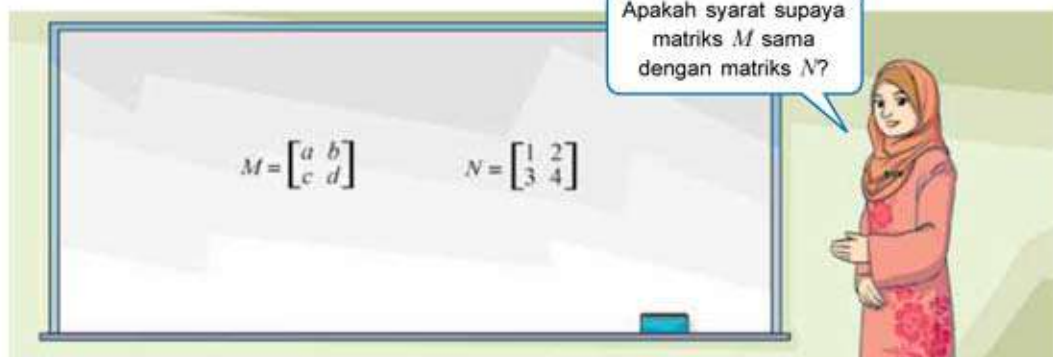
4. Diberi matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & -16 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$, hitung nilai $b_{12} + b_{21}$.

Bagaimanakah menentukan sama ada dua matriks adalah sama?

Standard Pembelajaran

Menentukan sama ada dua matriks adalah sama.

Perhatikan dua matriks di bawah.



Didapati matriks M dan matriks N mempunyai peringkat yang sama iaitu 2×2 dan jika setiap unsur sepadannya adalah sama, iaitu $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ dan $d = 4$, maka matriks M dan matriks N adalah **sama** dan boleh ditulis sebagai $M = N$.

$M = N$ jika dan hanya jika kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.

Contoh 4

Tentukan sama ada setiap pasangan matriks berikut adalah sama. Berikan sebab anda.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $C = [3 \quad 9]$ dan $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ dan $F = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $G = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 6 & 0.8 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 6 & \frac{4}{5} \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

- (a) $A = B$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.
 (b) $C \neq D$ kerana kedua-dua matriks tidak mempunyai peringkat yang sama. Peringkat C ialah 1×2 manakala peringkat D ialah 2×1 .
 (c) $E \neq F$ kerana unsur sepadannya tidak sama.
 (d) $G = H$ kerana kedua-dua matriks mempunyai peringkat yang sama dan setiap unsur sepadannya sama.

Contoh 5

Diberi bahawa matriks $P = \begin{bmatrix} x & 7 \\ 0 & 5 - 3z \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 5 & y + 1 \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x , nilai y dan nilai z jika $P = Q$.

Penyelesaian:

$P = Q$, maka semua unsur sepadan adalah sama.

$$\begin{array}{rcl} x = 5 & , & 7 = y + 1 & , & 5 - 3z = 2z \\ & & y = 7 - 1 & & 5 = 5z \\ & & y = 6 & & z = 1 \end{array}$$

Latih Kendiri 2.1c

1. Tentukan sama ada setiap pasangan matriks berikut adalah sama.

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1 & 6 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 6 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 12 \\ -7 \end{bmatrix}$ dan $[12 \quad -7]$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

2. Diberi $P = Q$, hitung nilai x , nilai y dan nilai z .

(a) $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & y \\ 2z - 3 & -5 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 3 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 6y + 5 & 3z + 4 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5x & -1 \\ 2y - 9 & -4x \end{bmatrix}$

Bagaimanakah menambah dan menolak matriks?

Standard Pembelajaran

Menambah dan menolak matriks.



Bagaimanakah data ini ditambah atau ditolak?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Jualan kipas angin bulan Mac				Jualan kipas angin bulan April				Jualan kipas angin bulan Mei		
2		Kipas Angin				Kipas Angin				Kipas Angin		
3		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding
4	Di kedai	16	18	11		20	15	9		15	21	10
5	Dalam talian	5	10	4		7	12	5		10	24	10
6												
7		Jumlah jualan bulan Mac dan April				Perbezaan jualan bulan April dan Mei						
8		Kipas Angin				Kipas Angin						
9		Berdiri	Siling	Dinding		Berdiri	Siling	Dinding				
10	Di kedai	36	33	20		-5	6	1				
11	Dalam talian	12	22	9		3	12	5				
12												

Perhatikan hampan elektronik di atas yang menunjukkan jualan kipas angin di Kedai Elektrik Sinar Jaya. Jualan kipas angin bulan Mac, April dan Mei masing-masing boleh diwakili oleh

matriks $P = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$, matriks $Q = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $R = \begin{bmatrix} 15 & 21 & 10 \\ 10 & 24 & 10 \end{bmatrix}$.

Jumlah jualan bulan Mac dan April boleh diperolehi dengan menambah matriks P dan matriks Q , iaitu

$$\begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 33 & 20 \\ 12 & 22 & 9 \end{bmatrix}.$$

Perbezaan jualan antara bulan April dengan Mei juga boleh ditentukan dengan membuat penolakan matriks R dan matriks Q , iaitu

$$\begin{bmatrix} 15 & 21 & 10 \\ 10 & 24 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

Penambahan dan penolakan matriks hanya boleh dilaksanakan pada matriks yang sama peringkat.

Unsur yang sepadan ditambah atau ditolak untuk mendapat satu matriks tunggal yang sama peringkat.

Bagi matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}.$$

Contoh 6

Tentukan sama ada penambahan dan penolakan boleh dilaksanakan pada pasangan matriks berikut. Berikan sebab anda.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 8 & 11 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) C = \begin{bmatrix} 1 & 12 \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(c) E = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } F = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) G = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

- (a) Tidak boleh kerana peringkat matriks A dan B adalah tidak sama.
 (b) Boleh kerana peringkat matriks C dan D adalah sama.
 (c) Boleh kerana peringkat matriks E dan F adalah sama.
 (d) Tidak boleh kerana peringkat matriks G dan H adalah tidak sama.

Contoh 7

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix}$, matriks $D = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, matriks $P = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{6} & 6 \\ 7.4 & -13 & 5 \\ 1 & 9 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 18 & \frac{1}{3} & -7 \\ 2.5 & -8 & 3 \\ 12 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$. Hitung

$$(a) C + D$$

$$(b) P - Q$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (a) C + D &= \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 6 & -11 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + 14 & -8 + (-2) & 4 + 1 \\ 6 + (-3) & -11 + 5 & 7 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 & -10 & 5 \\ 3 & -6 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menambah unsur yang sepadan

$$\begin{aligned} (b) P - Q &= \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{6} & 6 \\ 7.4 & -13 & 5 \\ 1 & 9 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & \frac{1}{3} & -7 \\ 2.5 & -8 & 3 \\ 12 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 - 18 & \frac{5}{6} - \frac{1}{3} & 6 - (-7) \\ 7.4 - 2.5 & -13 - (-8) & 5 - 3 \\ 1 - 12 & 9 - 0 & \frac{1}{4} - 0.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -20 & \frac{1}{2} & 13 \\ 4.9 & -5 & 2 \\ -11 & 9 & -0.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menolak unsur yang sepadan

i-Teknologi

Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk membuat penambahan dan penolakan matriks. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video201 untuk melihat video yang berkaitan.



Contoh 8

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} 2x-1 & -3 \\ -12 & 5+y \end{bmatrix}$, matriks $E = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 7 & y \end{bmatrix}$ dan $D + E = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} D + E &= \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2x-1 & -3 \\ -12 & 5+y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2 \\ 7 & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2x-1+x & -3+2 \\ -12+7 & 5+y+y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3x-1 & -1 \\ -5 & 5+2y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks sama

$$\begin{aligned} 3x-1 &= 8 & \text{dan} & & 5+2y &= 13 \\ 3x &= 9 & & & 2y &= 8 \\ x &= 3 & & & y &= 4 \end{aligned}$$

Bandingkan unsur-unsur yang sepadan

Maka, $x = 3$ dan $y = 4$

Contoh 9

Diberi $F + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, hitung matriks F .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} F + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 10

Jadual di sebelah menunjukkan catatan stok buku teks Tingkatan 4 bagi mata pelajaran Sains, Matematik dan Ekonomi di SMK Taman Suria. Hitung stok akhir bagi setiap jenis buku teks tersebut.

	Sains	Matematik	Ekonomi
Stok awal	326	335	82
Buku baharu diterima	56	47	15
Buku hilang dan rosak	32	26	11

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Stok akhir} &= \text{Stok awal} + \text{Buku baharu diterima} - \text{Buku hilang dan rosak} \\ &= [326 \ 335 \ 82] + [56 \ 47 \ 15] - [32 \ 26 \ 11] \\ &= [350 \ 356 \ 86] \end{aligned}$$

Maka, stok akhir buku teks Sains, Matematik dan Ekonomi masing-masing ialah 350, 356 dan 86.

Buletin Ilmiah

Matriks yang diungkapkan dalam bentuk persamaan dikenali sebagai persamaan matriks. Misalnya, $A + B = C$.

Semak Jawapan

Gantikan matriks $F = \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix}$ ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -11 + 16 - 7 \\ 16 + (-3) - 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Latih Kendiri 2.2a

1. Tentukan sama ada penambahan dan penolakan boleh dilaksanakan pada setiap pasangan matriks berikut.

(a) $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 13 & -1 & 11 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 & -16 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $[12 \quad -7]$

(d) $[2 \quad -9]$ dan $[1 \quad 6]$

2. Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, hitung

(a) $P - Q + R$

(b) $P + Q - R$

3. Selesaikan setiap yang berikut.

(a) $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 1 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -7 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ -3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$

4. Diberi $\begin{bmatrix} 3a + 2 \\ 9 - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \end{bmatrix}$, hitung nilai a dan nilai b .

5. Diberi matriks $S = \begin{bmatrix} 4x + 1 & -5 \\ 6 - y & x \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 7 & 3y \end{bmatrix}$ dan $S - T = \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -2 & z \end{bmatrix}$, hitung nilai x , nilai y dan nilai z .

6. Diberi $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} - V = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -1 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, hitung matriks V .

7. Encik Gopal mempunyai dua buah kedai, A dan B. Jadual di bawah menunjukkan pendapatan dan perbelanjaan jualan makanan dan minuman bagi kedua-dua buah kedainya pada bulan Jun.

Pendapatan		
	Makanan	Minuman
Kedai A	RM2 650	RM1 890
Kedai B	RM1 560	RM910

Perbelanjaan		
	Makanan	Minuman
Kedai A	RM930	RM850
Kedai B	RM540	RM260

Hitung jumlah keuntungan yang diperoleh Encik Gopal dari setiap kedainya pada bulan Jun. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

[Diberi bahawa keuntungan = pendapatan - perbelanjaan]



Pendaraban matriks dengan suatu nombor ialah satu proses **penambahan berulang**. Jika matriks A didarabkan dengan suatu nombor n , maka matriks A boleh ditambah dengan matriks A yang sama berulang sebanyak n kali, iaitu

$$nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ kali}}$$

Rumus ini bermakna setiap unsur dalam matriks A ditambah dengan unsur yang sama berulang sebanyak n kali. Jadi, untuk mendarab suatu matriks dengan suatu nombor, darabkan setiap unsur dalam matriks itu dengan nombor tersebut.

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan n ialah suatu nombor.

$$\text{Maka } nA = n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{bmatrix}$$

n dikenali sebagai skalar.

Buletin Ilmiah

Apabila suatu matriks didarab dengan suatu nombor nyata, nombor nyata itu dinamakan skalar.

Pendaraban matriks dengan suatu nombor dikenali sebagai **pendaraban skalar**.

Contoh 11

Diberi $D = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, hitung

(a) $3D$

(b) $-\frac{1}{2}D$

Penyelesaian:

(a) $3D = 3 \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3(-5) & 3(4) \\ 3(2) & 3(1) \end{bmatrix}$$

Darabkan semua unsur dengan 3

$$= \begin{bmatrix} -15 & 12 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $-\frac{1}{2}D = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)(-5) & \left(-\frac{1}{2}\right)(4) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(2) & \left(-\frac{1}{2}\right)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tujuan: Menorok hukum operasi aritmetik dalam penambahan dan penolakan matriks.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Tentukan hasil penambahan dan penolakan dalam **Lembaran Aktiviti** di bawah.

Lembaran Aktiviti:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)

Hukum Kalis Tukar Tertib	
$A + B$	$B + A$
$A - B$	$B - A$

(b)

Hukum Kalis Agihan	
$h(A + B)$	$hA + hB$
$h(A - B)$	$hA - hB$

(c)

Hukum Kalis Sekutuan	
$(A + B) + C$	$A + (B + C)$
$(A - B) - C$	$A - (B - C)$

(d)

Penambahan dan Penolakan Matriks Sifar	
$A + O$	$A - O$

Perbincangan:

Berdasarkan hasil dalam setiap jadual di atas, apakah kesimpulan yang diperoleh? Apakah kaitan antara proses penambahan dan penolakan matriks dengan hukum operasi aritmetik?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa;

- (a) $A + B = B + A$. Penambahan matriks mematuhi **Hukum Kalis Tukar Tertib**.
 $A - B \neq B - A$. Penolakan matriks tidak mematuhi Hukum Kalis Tukar Tertib.
- (b) $h(A + B) = hA + hB$, $h(A - B) = hA - hB$.
 Penambahan dan penolakan matriks mematuhi **Hukum Kalis Agihan**.
- (c) $(A + B) + C = A + (B + C)$. Penambahan matriks mematuhi **Hukum Kalis Sekutuan**.
 $(A - B) - C \neq A - (B - C)$. Penolakan matriks tidak mematuhi Hukum Kalis Sekutuan.
- (d) Matriks dengan semua unsurnya adalah sifar dinamakan **matriks sifar**, misalnya $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Penambahan dan penolakan matriks A dengan matriks sifar, O ialah:
 $A + O = A$ dan $A - O = A$

Buletin Ilmiah

Contoh matriks sifar:

$$O_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 12

Diberi $P = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, hitung $3(P - Q)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 3(P - Q) &= 3 \left(\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \quad \leftarrow \text{Buat penolakan dalam kurungan} \\
 &= 3 \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Darabkan semua unsur dengan 3} \\
 &= \begin{bmatrix} 15 & 36 \\ -12 & 9 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Contoh 13

(a) Diberi $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

(b) Diberi $4R + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, hitung matriks R .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 2 - x \\ 6 - (-3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bandingkan unsur-unsur sepadan.

$$\begin{aligned}
 2 - x &= 5, & 6 - (-3) &= y \\
 x &= -3, & y &= 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad 4R + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \\
 4R &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\
 4R &= \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \\
 R &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \begin{aligned} 4R &= A \\ R &= \frac{A}{4} \\ &= \frac{1}{4}A \end{aligned} \\
 R &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Contoh 14

Purata bilangan kenderaan di suatu kawasan parkir untuk setiap hari bagi 5 hari bekerja diwakili dengan Jadual X. Jadual Y pula mewakili purata bilangan kenderaan pada hujung minggu.

	Kereta	Motosikal
Berbumbung	42	8
Tidak berbumbung	20	11

Jadual X

	Kereta	Motosikal
Berbumbung	25	5
Tidak berbumbung	12	3

Jadual Y

Hitung bilangan kenderaan yang parkir di kawasan tersebut dalam seminggu.

Medan Interaktif

Tunjukkan $3P - 3Q = 3(P - Q)$

Teknologi

Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk membuat pendaraban skalar. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video202 untuk melihat video yang berkaitan.



Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 5X + 2Y &= 5 \begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 20 & 11 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \leftarrow 5 \text{ hari bekerja} + 2 \text{ hari pada hujung minggu} \\
 &= \begin{bmatrix} 210 & 40 \\ 100 & 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 24 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 260 & 50 \\ 124 & 61 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Latih Kendiri 2.2b

1. Tentukan hasil darab bagi setiap matriks berikut.

(a) $3 \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $0.6 \begin{bmatrix} 11 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 & -20 \\ -6 & 16 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $-2 \begin{bmatrix} 0.4 & 8 \\ -9 & 2.5 \end{bmatrix}$

(e) $1.2 \begin{bmatrix} 10 & -1 & 11 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(f) $-\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 100 \\ -90 \\ -20 \end{bmatrix}$

2. Selesaikan setiap operasi yang berikut.

(a) $5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 9 & -4 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

(b) $6 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $7 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 21 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

(d) $0.2 \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ -5 & 2.5 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$, matriks $F = \begin{bmatrix} -7 & 22 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $G = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$,
tunjukkan $(E + F) + G = E + (F + G)$.

4. Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -0.7 \end{bmatrix}$, matriks $Q = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ dan matriks $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, hitung $P - 1.4Q + O$.

5. Diberi $4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ c & 0.1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} a & 5 \\ -35 & 1.5 \end{bmatrix}$, hitung nilai a , nilai b dan nilai c .

6. Diberi $\begin{bmatrix} -10 & 9 \end{bmatrix} - 2X + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \end{bmatrix}$, hitung matriks X .

7. Kedai kasut Encik Jamal menjual kasut dewasa dan kasut kanak-kanak. Jadual 1 menunjukkan stok setiap jenis kasut pada awal minggu tertentu manakala Jadual 2 menunjukkan jualan setiap jenis kasut pada minggu tersebut.

	Perempuan	Lelaki
Dewasa	85	70
Kanak-kanak	110	98

Jadual 1

	Perempuan	Lelaki
Dewasa	33	24
Kanak-kanak	42	40

Jadual 2

Hitung inventori akhir setiap jenis kasut pada hujung minggu tersebut. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

Bagaimanakah mendarab dua matriks?

Berdasarkan situasi sebelum ini, jualan kipas angin pada bulan Mac boleh diwakili dengan matriks seperti berikut:

$$P = \begin{bmatrix} \text{Berdiri} & \text{Siling} & \text{Dinding} \\ 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Di kedai} \\ \text{Dalam talian} \end{matrix}$$

Katakan komisen untuk jualan setiap unit kipas berdiri, siling dan dinding ialah RM25, RM30 dan RM20. Bagaimanakah anda menghitung jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan di kedai dan dalam talian?

Jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan di kedai $= (16 \times \text{RM}25) + (18 \times \text{RM}30) + (11 \times \text{RM}20)$ $= \text{RM}1\ 160$	Jumlah komisen yang diperoleh daripada jualan dalam talian $= (5 \times \text{RM}25) + (10 \times \text{RM}30) + (4 \times \text{RM}20)$ $= \text{RM}505$
--	---

Jumlah komisen yang diperoleh boleh dikira dalam bentuk matriks. Jika komisen jualan setiap

unit kipas diwakili dalam bentuk matriks lajur, iaitu $K = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$, maka jumlah komisen yang

diperoleh daripada jualan di kedai dan dalam talian boleh ditulis dalam bentuk matriks seperti yang berikut.

$$PK = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 16(25) + 18(30) + 11(20) \\ 5(25) + 10(30) + 4(20) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1160 \\ 505 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$



Andaikan K sebagai matriks baris. Lakukan pendaraban matriks PK . Adakah pendaraban boleh dilakukan?

PK dikenali sebagai pendaraban matriks P dengan matriks K dan $\begin{bmatrix} 1160 \\ 505 \end{bmatrix}$ ialah hasil darab dua matriks itu.

Secara umumnya, untuk mendarab dua matriks, A dan B , bilangan lajur matriks A mesti sama dengan bilangan baris matriks B . Bilangan baris matriks A dan bilangan lajur matriks B menjadi peringkat bagi hasil darab dua matriks itu, AB .



Jika matriks A mempunyai peringkat $m \times n$ dan matriks B mempunyai peringkat $n \times p$, maka pendaraban AB boleh dilakukan dan peringkat AB ialah $m \times p$.

Contoh 15

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan sama ada pendaraban CD dan DC boleh dilakukan atau tidak. Jika boleh, nyatakan peringkat hasil darab matriks itu.

Penyelesaian:

Peringkat matriks $C = 2 \times 1$, peringkat matriks $D = 2 \times 2$.



Pendaraban CD tidak boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks C tidak sama dengan bilangan baris matriks D .



Pendaraban DC boleh dilakukan kerana bilangan lajur matriks D sama dengan bilangan baris matriks C .
Peringkat DC ialah 2×1 .

Contoh 16

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung AB .

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(6) + (3)(-2) & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \\ & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 1 dan lajur 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & (2)(-7) + (3)(1) \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 1 dan lajur 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ (1)(6) + (5)(-2) & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 2 dan lajur 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & (1)(-7) + (5)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Unsur pada baris 2 dan lajur 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(6) + (3)(-2) & (2)(-7) + (3)(1) \\ (1)(6) + (5)(-2) & (1)(-7) + (5)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tip Bestari

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) \\ (a_{21} \times b_{11}) + (a_{22} \times b_{21}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} \\ e_{21} + f_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

Contoh 17

Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, matriks $F = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ dan matriks $G = [4 \ 3]$. Hitung

- (a) GE (b) FG (c) GF

Penyelesaian:

$$(a) \ GE = [4 \ 3]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= [4(5) + 3(-4) \quad 4(-1) + 3(8) \quad 4(0) + 3(7)]$$

$$= [8 \ 20 \ 21]_{1 \times 3} \quad \leftarrow \text{Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat } 1 \times 3$$

$$(b) \ FG = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2 \times 1} [4 \ 3]_{1 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(4) & (-2)(3) \\ 7(4) & 7(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 28 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \leftarrow \text{Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat } 2 \times 2$$

$$(c) \ GF = [4 \ 3]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$= [4(-2) + 3(7)]$$

$$= [13]_{1 \times 1} \quad \leftarrow \text{Hasil darab matriks ialah matriks berperingkat } 1 \times 1$$

Contoh 18

Diberi matriks $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ dan matriks $L = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hitung

- (a) L^2 (b) KL^2 (c) L^3

Penyelesaian:

$$(a) \ L^2 = LL$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 + 0 & -8 + 2 \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TiP Bestari

Sentiasa semak peringkat matriks yang terhasil sebelum pendaraban. Misalnya, matriks peringkat $m \times n$ darab matriks peringkat $n \times p$ menghasilkan matriks peringkat $m \times p$.

Minda Kritis

Mengapakah $FG \neq GF$?

i-Teknologi

Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk membuat pendaraban dua matriks. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video203 untuk melihat video yang berkaitan.

**Buletin Ilmiah**

$$\text{Diberi } L = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^2 \neq \begin{bmatrix} (-4)^2 & 2^2 \\ 0^2 & 1^2 \end{bmatrix}$$

$$L^2 = LL,$$

$$L^3 = L^2L = LL^2.$$

(b) KL^2

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 48 + 0 & -18 + 2 \\ -16 + 0 & 6 + 5 \\ 64 + 0 & -24 + (-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 48 & -16 \\ -16 & 11 \\ 64 & -26 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(c) L^3

$$\begin{aligned}
 &= L^2L \\
 &= \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -64 + 0 & 32 + (-6) \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -64 & 26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Contoh 19

Diberi $\begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1-y \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 6x & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= [(6x)(2) + (-5)(1) \quad (6x)(3) + (-5)(4)]_{1 \times 2} \\
 &= [12x - 5 \quad 18x - 20]
 \end{aligned}$$

Maka, $[12x - 5 \quad 18x - 20] = [7 \quad 1 - y]$.

Bandingkan unsur-unsur sepadan.

$$\begin{aligned}
 12x - 5 &= 7 & \text{dan} & & 18x - 20 &= 1 - y \\
 12x &= 12 & & & 18(1) - 20 &= 1 - y \\
 x &= 1 & & & -2 &= 1 - y \\
 & & & & y &= 3
 \end{aligned}$$

Contoh 20

Jadual di bawah menunjukkan unit saham yang dibeli oleh Khairil dan Mahmud.

	Saham A (unit)	Saham B (unit)
Khairil	5 000	4 000
Mahmud	2 000	6 000

Diberi harga seunit saham A dan seunit saham B semasa pembelian ialah RM1.50 dan RM0.82. Hitung jumlah pelaburan Khairil dan jumlah pelaburan Mahmud.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 5000 & 4000 \\ 2000 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.50 \\ 0.82 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7500 + 3280 \\ 3000 + 4920 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10780 \\ 7920 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jumlah pelaburan Khairil dan Mahmud masing-masing ialah RM10 780 dan RM7 920.

Minda Kritis
Cuba hitung LL^2 .

Seronoknya Matematik!

Imbas kod QR atau layari bit.do/KalkulatorMatriks untuk menggunakan kalkulator matriks.



Minda Kritis

Diberi matriks $P = \begin{bmatrix} a & b+1 \end{bmatrix}$

dan $Q = \begin{bmatrix} c-1 & 2 \\ -3 & 4d \end{bmatrix}$.

Hitung

- (i) PQ
(ii) Q^2

1. Diberi empat matriks $P = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $R = [4 \ 8 \ 5]$ dan $S = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$.

Tentukan sama ada pendaraban matriks berikut boleh dilakukan atau tidak. Jika ya, nyatakan peringkat hasil darab pasangan matriks itu.

- (a) PQ (b) QR (c) RS
(d) SP (e) PS (f) QP

2. Diberi empat matriks, $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
Hitung

- (a) TU (b) UW (c) UV
(d) WV (e) W^2 (f) W^3

3. Diberi $\begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \end{bmatrix}$, hitung nilai x dan nilai y .

4. Diberi $\begin{bmatrix} 9 & r \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & s \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14.5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$, hitung nilai r dan nilai s .

5. Diberi $G = \begin{bmatrix} p & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, hitung nilai p , nilai q dan nilai r jika

(a) $GH = \begin{bmatrix} 3 & 2q \\ -18 & 3p + r \end{bmatrix}$ (b) $G^2 = \begin{bmatrix} r & -25 \\ -5 & 7q \end{bmatrix}$

(c) $HG = \begin{bmatrix} -11 & 2.5q \\ \frac{p+3r}{2} & 5p \end{bmatrix}$ (d) $H^2 = \begin{bmatrix} 57 & 6p \\ 1.2q & \frac{7r}{5} \end{bmatrix}$

6. Encik Koh menyewa sebuah gerai di Expo Pendidikan untuk menjual tiga jenis barangan yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

	Barangan A	Barangan B	Barangan C
Hari pertama	40	28	36
Hari kedua	42	36	30
Hari ketiga	35	25	42

Diberi keuntungan jualan setiap barangan A, B dan C masing-masing ialah RM5, RM8 dan RM6. Hitung jumlah keuntungan yang diterima oleh Encik Koh setiap hari. Tunjukkan pengiraan anda dalam bentuk matriks.

[Diberi bahawa jumlah keuntungan = jualan barangan A $\times$ keuntungan barangan A
+ jualan barangan B $\times$ keuntungan barangan B
+ jualan barangan C $\times$ keuntungan barangan C]

Apakah ciri-ciri matriks identiti?

$$a \times 1 = a$$

$$1 \times a = a$$

Standard Pembelajaran

Menerangkan ciri-ciri matriks identiti.

Apabila 1 didarabkan dengan sebarang nombor, a , hasilnya ialah a . Apabila suatu matriks didarabkan dengan matriks A , hasilnya ialah matriks A . Matriks tersebut merupakan matriks identiti. Apakah ciri-ciri matriks identiti?

MOBILISASI MINDA 2

Berkumpulan

Tujuan: Menentukan matriks identiti.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Salin **Lembaran Aktiviti** di bawah dan lengkapkan secara bergilir-gilir.

Lembaran Aktiviti:

	Matriks A	Matriks B	AB	BA
(a)	$[5 \quad -2]$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$		
(b)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$		
(c)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
(d)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$		
(e)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		
(f)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
(g)	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Perbincangan:

1. Matriks B yang manakah apabila didarabkan dengan matriks A akan menghasilkan matriks A juga?
2. Apakah unsur-unsur yang terdapat dalam matriks B tersebut? Bagaimanakah kedudukan unsur-unsur itu?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa;

- (a) Matriks B dalam bentuk $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ apabila didarabkan dengan matriks A akan menghasilkan matriks A , iaitu $AB = BA = A$.
- (b) Unsur-unsur dalam matriks B ini terdiri daripada 0 dan 1 sahaja dengan unsur 1 terletak di sepanjang pepenjuruan dari sudut kiri di sebelah atas ke sudut kanan di sebelah bawah dan unsur yang lain adalah sifar.

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dikenali sebagai matriks identiti dan diwakili oleh I .

Matriks identiti ialah matriks segi empat sama.

Matriks identiti, I , didarabkan dengan suatu matriks A , akan menghasilkan matriks A .

$$AI = IA = A$$

Contoh 21

Tuliskan matriks identiti berdasarkan peringkat berikut.

- (a) 1×1 (b) 2×2
(c) 4×4 (d) 5×5

Penyelesaian:

(a) $[1]$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Latih Kendiri 2.2d

1. Antara matriks berikut, yang manakah matriks identiti? Jika bukan, berikan sebab anda.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks identiti, I , berperingkat $n \times n$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Buletin Ilmiah

Susun unsur 1 di sepanjang pepenjuruan dari sudut kiri di sebelah atas ke sudut kanan di sebelah bawah dan unsur lain adalah sifar. Pepenjuruan ini dinamakan pepenjuruan utama. Matriks ini dinamakan matriks pepenjuruan.

Minda Kritis

Matriks identiti ialah matriks pepenjuruan. Adakah matriks pepenjuruan ialah matriks identiti? Bincangkan.

2. Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tunjukkan matriks D ialah matriks identiti.
3. Diberi matriks $S = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. Hitung
- (a) $SI + TI$ (b) $(IS)T$
 (c) $4IT - F$ (d) $(S - I)I$

Apakah maksud matriks songsang?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB \quad \quad \quad BA \quad \quad \quad I$

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud matriks songsang dan seterusnya menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 .

Jika pendaraban matriks A dan matriks B menghasilkan matriks identiti, I , maka matriks B adalah songsangan matriks A dan sebaliknya.

MOBILISASI MINDA 3 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan matriks songsang.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Setiap murid memilih sekeping kad matriks A dan sekeping kad matriks B seperti yang ditunjukkan di bawah.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Murid membuat pendaraban matriks AB dan BA . Hasil darab dicatatkan dalam jadual seperti di sebelah.
4. Murid menukar kad matriks B dengan rakan lain dalam kumpulan. Langkah 3 diulangi.
5. Murid membincangkan hasil dapatan mereka dalam kumpulan.

Matriks A	Matriks B	AB	BA

Perbincangan:

1. Hasil darab dua matriks yang manakah ialah matriks identiti?
2. Apakah kesimpulan tentang hubungan antara dua matriks tersebut?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasangan matriks di atas ialah matriks songsang antara satu sama lain.

A^{-1} dibaca sebagai matriks songsang A .

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$$

Pendaraban matriks A dan **matriks songsang** A , A^{-1} , akan menghasilkan matriks identiti, I .
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Contoh 22

Tentukan sama ada matriks berikut ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Jelaskan jawapan anda.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab bukan matriks identiti

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ bukan matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini bukan matriks identiti.

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← Hasil darab ialah matriks identiti

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ kerana hasil darab dua matriks ini ialah matriks identiti.

Matriks songsang hanya wujud dalam bentuk matriks segi empat sama kerana kedua-dua AA^{-1} dan $A^{-1}A$ sama dengan I . Namun, bukan semua matriks segi empat sama mempunyai matriks songsang.

Latih Kendiri 2.2e

1. Tentukan sama ada matriks berikut ialah matriks songsang antara satu sama lain.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Bagaimanakah menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 ?

MOBILISASI MINDA 4 211 Berkumpulan

Tujuan: Menerbit rumus untuk menentukan matriks songsang bagi matriks 2×2 .

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada kumpulan 4 orang murid.
2. Salin dan lengkapkan **Lembaran Aktiviti** berikut mengikut arahan yang diberikan.

Lembaran Aktiviti:

Diberi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$.	
Arahan	Jalan Kerja
Darabkan matriks A dan A^{-1}	$AA^{-1} = \begin{bmatrix} ap + br & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$
Bentukkan 4 persamaan daripada $AA^{-1} = I$	$\begin{bmatrix} ap + br & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $ap + br = 1$ (ii) $\boxed{}$ (iii) $\boxed{}$ (iv) $\boxed{}$
Dengan kaedah penggantian, ungkapkan p, q, r dan s dalam sebutan a, b, c dan d	Guna persamaan (i) dan (iii), ungkapkan p dan r dalam sebutan a, b, c dan d $p = \frac{d}{ad - bc}$ $r = \boxed{}$ Guna persamaan (ii) dan (iv), ungkapkan q dan s dalam sebutan a, b, c dan d $q = \boxed{}$ $s = \boxed{}$
Tuliskan matriks A^{-1} dalam sebutan a, b, c dan d	$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$
Tuliskan A^{-1} sebagai pendaraban skalar	$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{}} \begin{bmatrix} d & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$

3. Tuliskan semua jalan kerja pada kertas sebak dan tampal pada dinding. Murid memberikan komen tentang hasil kerja kumpulan lain dengan menampal nota lekit pada hasil kerja kumpulan itu.

Perbincangan:

Apakah rumus untuk menentukan matriks songsang?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, didapati bahawa

- (a) skalar yang dihasilkan ialah $\frac{1}{ad-bc}$.
 (b) kedudukan unsur a_{11} ialah d , unsur a_{12} ialah $-b$, unsur a_{21} ialah $-c$ dan unsur a_{22} ialah a .
 Perhatikan kedudukan a dan d saling bertukar kedudukan manakala b dan c didarabkan dengan -1 .

Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, matriks songsang, A^{-1} boleh diperolehi dengan rumus berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ dengan keadaan } ad-bc \neq 0$$

Penentu matriks A , $|A|$ ialah $ad-bc$ dengan keadaan $ad-bc \neq 0$. Oleh itu, matriks songsang, A^{-1} wujud. Matriks songsang tidak wujud apabila $ad-bc = 0$.

Contoh 23

Bagi setiap matriks yang berikut, tentukan sama ada matriks songsang wujud. Jika wujud, hitung matriks songsang.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) $ad-bc = 1(8) - 2(4)$
 $= 8 - 8$
 $= 0$

$|A| = 0$. Maka, A^{-1} tidak wujud.

(b) $ad-bc = 3(4) - 5(2)$
 $= 12 - 10$
 $= 2$
 $\neq 0$

$|B| \neq 0$. Maka, B^{-1} wujud.

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{3(4) - 5(2)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Saling tukar kedudukan unsur dalam pepenjuru utama dan darabkan kedua-dua unsur lain dengan -1



Istilah penentu diperkenalkan oleh Carl Gauss (1777-1855), ahli matematik Jerman, pada tahun 1801.

Contoh 24

Diberi matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, hitung matriks songsang bagi C .

Penyelesaian:

$$C^{-1} = \frac{1}{2(-2) - (-6)(1)} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Kalkulator saintifik boleh digunakan untuk mencari penentu. Imbas kod QR atau layari bit.do/Video204 untuk melihat video yang berkaitan.



Contoh 25

Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} m & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, hitung nilai m jika

(a) matriks D tidak mempunyai matriks songsang,

(b) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

(a) Matriks D tidak mempunyai matriks songsang, maka

$$\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ -2m - (-6)(1) &= 0 \\ -2m + 6 &= 0 \\ m &= 3 \end{aligned}$$

(b) $DD^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} m & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m(-1) + (-6)\left(-\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ -m + 3 &= 1 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Minda Kritis

Apakah matriks songsang bagi matriks identiti?

Minda Kritis

Kenapa $ad - bc = 0$ menyebabkan A^{-1} tidak wujud?

Semak Jawapan



$$D^{-1} = \frac{1}{-2m - (-6)(1)} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2m + 6} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & m \end{bmatrix}$$

Unsur sepadan pada baris 1 lajur 1:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{-2}{-2m + 6} \\ 2m - 6 &= -2 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Contoh 26

Diberi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks A berperingkat 2×2 . Hitung matriks A .

Penyelesaian:

Diberi hasil darab $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ dengan A ialah matriks identiti, maka A ialah matriks songsang bagi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(1)(8) - (2)(3)} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Bagi setiap matriks yang berikut, tentukan sama ada matriks songsang wujud. Jika wujud, hitung matriks songsang.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Hitung matriks songsang bagi matriks yang berikut.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

3. Diberi matriks $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & p \end{bmatrix}$. Hitung nilai p jika

- (a) matriks G tidak mempunyai matriks songsang,

(b) $G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

4. Diberi $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks P berperingkat 2×2 . Hitung matriks P .

Bagaimanakah menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak?

Persamaan linear serentak boleh diselesaikan dengan menggunakan kaedah matriks mengikut langkah-langkah berikut.

Standard Pembelajaran

Menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak.

Persamaan linear serentak

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$

Bentuk matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Contoh 27

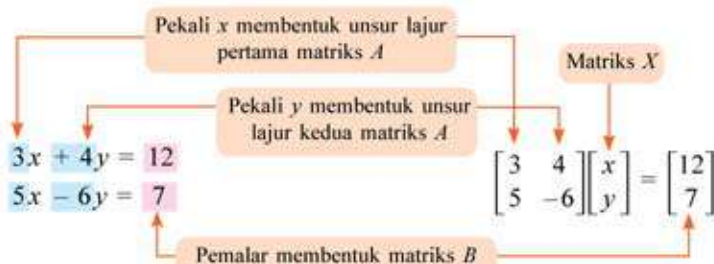
Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 5x - 6y &= 7 \end{aligned}$$

Minda Kritis

Adakah pendaraban ini boleh dilakukan?
 $AA^{-1}X = BA^{-1}$

Penyelesaian:



Persamaan linear serentak tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Contoh 28

Selesaikan persamaan linear serentak di bawah dengan menggunakan kaedah matriks.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 4y &= 4 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tulis persamaan linear serentak dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{(1)(-4) - (-2)(3)} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Maka, $x = -2$ dan $y = -\frac{1}{2}$ ← Jawapan akhir

Latih Kendiri 2.2g

- Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.
 - $x - y = 7$, $x + 3y = 5$
 - $3x + y = 0$, $5x + 2y = -14$
 - $7x + 2y = -11$, $2x - y = -10$
 - $3x + 2y - 14 = 0$, $4y = 5x - 5$
 - $2x + y + 4 = 0$, $y - 3x = 11$
 - $2x + y = -9$, $5x = -12$
 - $2x = 5y$, $\frac{x}{5} + 2y = 3$
 - $\frac{x}{y} = 4$, $0.8(x + 5) = 3y$
- Dalam suatu pertandingan catur, jumlah peserta ialah 100 orang. Bilangan peserta lelaki, x , ialah 14 orang kurang daripada 2 kali bilangan peserta perempuan, y . Tuliskan persamaan linear serentak yang mewakili maklumat di atas dalam bentuk matriks.

Minda Kritis

Jika persamaan dalam Contoh 27,

$$5x - 6y = 7$$

$$3x + 4y = 12$$

ditulis dalam bentuk matriks, adakah susunan persamaan itu mempengaruhi jawapan?

Tip Bestari

Penyelesaian persamaan linear serentak bermaksud mencari nilai x dan nilai y . Jadi, jawapan akhir menyatakan nilai-nilai itu.

Semak Jawapan

Darabkan $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 6 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Selesaikan persamaan linear serentak di bawah dengan menggunakan kaedah matriks.

(a) $x - 2y = 5$, $2x - 3y = 10$

(b) $2x - 5y = 1$, $3x - y = -5$

(c) $2x - y = 8$, $x + y = 1$

(d) $3x + 2y = 4$, $9x + 4y = 14$

(e) $4x + 3y = 11$, $2y = 9 - 6x$

(f) $5x - 5y - 6 = 0$, $2x - 2.1 = 3y$

(g) $p + 3q = 4$, $3 + \frac{p}{2} = q$

(h) $m + n = 5$, $\frac{m}{2} - \frac{n}{4} = 1$

Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan matriks?

Standard Pembelajaran

Meyeleasikan masalah yang melibatkan matriks.

Tulis persamaan linear dalam bentuk $ax + by = p$, $cx + dy = q$ dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah

Tulis persamaan linear serentak dalam bentuk matriks $AX = B$

Selesaikan dengan pendaraban matriks songsang: $X = A^{-1}B$

Contoh 29

Saya membeli 2 keping tiket kanak-kanak dan sekeping tiket dewasa dengan bayaran RM32.



Saya membeli 5 keping tiket kanak-kanak dan 3 keping tiket dewasa dengan bayaran RM88.



Berdasarkan perbualan di atas, berapakah harga sekeping tiket kanak-kanak dan dewasa?

Penyelesaian:

Memahami masalah

Harga 2 keping tiket kanak-kanak dan 1 keping tiket dewasa ialah RM32.

Harga 5 keping tiket kanak-kanak dan 3 keping tiket dewasa ialah RM88.

x = harga sekeping tiket kanak-kanak

y = harga sekeping tiket dewasa

Membuat kesimpulan

Harga sekeping tiket kanak-kanak ialah RM8 dan sekeping tiket dewasa ialah RM16.

Merancang strategi

- Bentukkan dua persamaan linear.
- Ungkapkan persamaan dalam bentuk matriks dan selesaikannya.

Melaksanakan strategi

$$2x + y = 32$$

$$5x + 3y = 88$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2)(3) - (1)(5)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6 - 5} \begin{bmatrix} 96 - 88 \\ -160 + 176 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Contoh 30

	Kamera K	Kamera L
Pemasangan	10 minit	10 minit
Pembungkusan	5 minit	9 minit

Syarikat Komunikasi Era Baru menghasilkan dua model kamera, K dan L. Setiap kamera yang dihasilkan perlu melalui dua bahagian, iaitu Bahagian Pemasangan dan Bahagian Pembungkusan. Jadual di atas menunjukkan masa pemasangan dan pembungkusan bagi setiap jenis kamera. Diberi bahawa Bahagian Pemasangan beroperasi selama 12 jam sehari dan Bahagian Pembungkusan pula beroperasi selama 9 jam sehari. Hitung bilangan kamera K dan kamera L yang boleh dihasilkan dalam sehari.

Penyelesaian:

Memahami masalah

Jumlah masa pemasangan ialah 12 jam bersamaan 720 minit.
Jumlah masa pembungkusan ialah 9 jam bersamaan 540 minit.

x = bilangan kamera K yang dihasilkan
 y = bilangan kamera L yang dihasilkan

Merancang strategi

- Bentukkan dua persamaan linear.
- Ungkapkan persamaan dalam bentuk matriks dan selesaikannya.

Melaksanakan strategi

$$10x + 10y = 720$$

$$5x + 9y = 540$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 540 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(10)(9) - (10)(5)} \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 540 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1080 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Membuat kesimpulan

Bilangan kamera K yang dihasilkan ialah 27 unit dan bilangan kamera L yang dihasilkan ialah 45 unit.

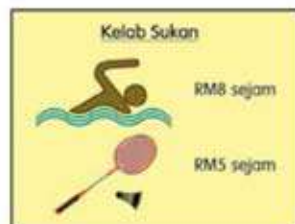
Latih Kendiri 2.2h

- Suatu kaji selidik telah dijalankan mengenai jualan dua jenis karipap, berinti sardin dan berinti kentang. Dalam satu jam pertama, 24 biji karipap berinti sardin dan 18 biji karipap berinti kentang telah dijual, dan jumlah jualan ialah RM28.80. Dalam satu jam seterusnya, 30 biji karipap berinti sardin dan 14 biji karipap berinti kentang telah dijual, dan jumlah jualan ialah RM29.20. Hitung harga satu biji karipap berinti sardin dan satu biji karipap berinti kentang dengan menggunakan kaedah matriks.

2. Akmal menghabiskan RM68 seminggu untuk menjalani kedua-dua sukan yang dinyatakan di bawah. Hitung tempoh, dalam jam, Akmal berenang dan bermain badminton di Kelab Sukan dalam seminggu dengan menggunakan kaedah matriks.

Saya menggunakan 10 jam seminggu untuk berenang dan bermain badminton di Kelab Sukan.

Akmal



3. Puan Komala dan Puan Lily pergi ke pasar untuk membeli betik dan pisang. Jadual di bawah menunjukkan berat betik dan pisang yang dibeli oleh mereka.

	Betik	Pisang
Puan Komala	4 kg	2 kg
Puan Lily	5 kg	3 kg

Puan Komala dan Puan Lily membayar RM26 dan RM35 untuk pembelian dua jenis buah ini. Hitung harga bagi sekilogram betik dan sekilogram pisang dengan menggunakan kaedah matriks.

4. Sebuah bangunan mempunyai beberapa tempat parkir untuk kereta dan motosikal. Pada suatu hari, terdapat sejumlah 66 buah kenderaan parkir di sana dan jumlah bilangan roda ialah 190. Hitung bilangan kereta dan bilangan motosikal yang parkir pada hari itu dengan menggunakan kaedah matriks. Andaikan semua motosikal beroda dua.
5. Encik Jefri dan Encik Tan masing-masing melabur di Amanah Saham P dan Amanah Saham Q seperti ditunjukkan dalam jadual di bawah.

	Amanah Saham P	Amanah Saham Q
Encik Jefri	RM5 000	RM3 000
Encik Tan	RM6 000	RM4 000

Selepas setahun, Encik Jefri memperoleh dividen sebanyak RM350 daripada pelaburan kedua-dua amanah saham ini manakala Encik Tan memperoleh dividen sebanyak RM440. Hitung kadar dividen yang diberikan oleh Amanah Saham P dan Amanah Saham Q dengan menggunakan kaedah matriks.

Arena Rumusan

MATRIKS

2

BAB

Matriks

- Nombor-nombor yang disusun dalam baris dan lajur untuk membentuk satu tatasusunan segi empat tepat atau segi empat sama.
- Ditulis dalam kurungan [] atau ()

Operasi Asas Matriks

Menambah dan menolak matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

Matriks identiti, I , peringkat $n \times n$ dengan unsur 1 di pepenjuru utama dan unsur selainnya 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

Mendarab matriks dengan suatu nombor

$$n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{bmatrix}$$

Mendarab dua matriks

$$\begin{matrix} A & B & = & AB \\ m \times n & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [ac + bd]$$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Matriks songsang

Matriks songsang A diwakili dengan A^{-1} .

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Peringkat

Peringkat $m \times n$ mempunyai m baris dan n lajur

Unsur

a_{ij} ialah unsur baris ke- i dan lajur ke- j

Matriks sama

$A = B$ jika peringkat kedua-dua matriks adalah sama dan unsur sepadan adalah sama

Menyelesaikan persamaan linear serentak

Persamaan linear serentak

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$

Bentuk matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

dengan keadaan a, b, c, d, p dan q ialah pemalar manakala x dan y ialah pemboleh ubah

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$



Pada akhir bab ini, saya dapat

mewakili maklumat situasi sebenar dalam bentuk matriks.		
menentukan peringkat matriks dan seterusnya mengenal pasti unsur tertentu dalam suatu matriks.		
menentukan sama ada dua matriks adalah sama.		
menambah dan menolak matriks.		
mendarab matriks dengan suatu nombor.		
mendarab dua matriks.		
menerangkan ciri-ciri matriks identiti.		
menerangkan maksud matriks songsang dan seterusnya menentukan matriks songsang bagi suatu matriks 2×2 .		
menggunakan kaedah matriks untuk menyelesaikan persamaan linear serentak.		
menyelesaikan masalah yang melibatkan matriks.		

PROJEK MINI

Syarikat pengangkutan menggunakan rangkaian untuk mewakili laluan pengangkutan mereka. Rangkaian mempunyai bucu yang disambungkan dengan tepi.

Dalam rajah di bawah, bucu P , Q , R , S dan T mewakili bandar manakala tepi mewakili laluan bas di antara dua buah bandar. Semua laluan ini merupakan jalan yang menghubungkan bandar bersebelahan. Sistem laluan ini boleh diwakili dengan matriks seperti di bawah.



Ke

	P	Q	R	S	T
P	0	1	1	0	0
Q	1	0	1	0	0
R	1	1	0	1	0
S	0	0	1	0	1
T	0	0	0	1	0

Dari

Sediakan satu laporan tentang sistem laluan bas (atau pengangkutan yang lain) di kawasan anda. Laporan anda perlu mengandungi

- pengenalalan sistem pengangkutan awam di kawasan anda,
- penggunaan matriks dalam perwakilan sistem laluan pengangkutan awam,
- maksud unsur dalam matriks.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz02 untuk kuiz interaktif



FAHAM

1. Nyatakan bilangan baris dan lajur bagi matriks $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.
2. Diberi $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $AB = C$. Tentukan peringkat matriks C .
3. Diberi matriks $D = \begin{bmatrix} 4 & p \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Hitung nilai p jika penentu matriks D ialah 0.
4. Diberi matriks $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, tunjukkan $E + E + E = 3E$.
5. Tuliskan persamaan linear serentak berikut dalam bentuk matriks.

$$\begin{aligned} m - 3 &= 4n \\ 3m + 2n - 2 &= 0 \end{aligned}$$

MASTERI

6. Diberi $G = \begin{bmatrix} 4 & r \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}$. Hitung nilai r dan nilai s jika $GH = HG$.
7. Diberi $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $AB = I$. Hitung matriks B .
8. Diberi $P = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2z - 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0.2 & -\frac{1}{3} \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 11 & -25 \\ y + 6x & -0.2 \\ 24 & 9 \end{bmatrix}$ dan $0.8P + 3Q = R$,
hitung nilai x , nilai y dan nilai z .
9. Diberi matriks $F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
(a) Hitung F^3 .
(b) Seterusnya, hitung matriks G jika $F^3 - 5G = 12F$.
10. Diberi $\frac{1}{p} \begin{bmatrix} 2 & q \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, hitung nilai p dan nilai q .
11. (a) Tuliskan persamaan linear serentak di bawah dalam bentuk matriks.
(b) Hitung nilai x dan nilai y dengan menggunakan kaedah matriks.

$$\begin{aligned} 2y - x &= 5 \\ 3x - 8y &= -19 \end{aligned}$$

12. Satu kejohanan maraton mempunyai 128 orang peserta. Bilangan peserta lelaki ialah 16 orang kurang daripada 2 kali bilangan peserta perempuan. Hitung bilangan peserta lelaki dan peserta perempuan maraton itu dengan menggunakan kaedah matriks.
13. Diberi persamaan linear serentak $px + 4y = 10$ dan $qx - 2y = 1$ tiada penyelesaian. Ungkapkan p dalam sebutan q .
14. Faris mengambil satu kursus di sebuah kolej. Dia telah mendaftar tiga subjek bagi semester pertama. Markah keseluruhan setiap subjek dikira berdasarkan markah bahagian latihan dan peperiksaan mengikut peratusan setiap bahagian. Jadual 1 menunjukkan markah yang diperolehi Faris bagi setiap bahagian pada semester pertama. Jadual 2 menunjukkan peratusan bahagian dalam pengiraan markah keseluruhan.

	Latihan	Peperiksaan
Matematik	80	70
Bahasa Inggeris	60	75
Sains Komputer	74	84

Jadual 1

	Semester Pertama
Latihan	60%
Peperiksaan	40%

Jadual 2

- (a) Wakilkan maklumat dalam Jadual 1 dan Jadual 2 dengan matriks.
 (b) Hitung markah keseluruhan Matematik pada semester pertama dengan menggunakan kaedah matriks.
 (c) Tentukan subjek yang terbaik pada semester pertama.
15. Syahirah sedang menjalani satu pelan diet yang melibatkan dua jenis minuman iaitu P dan Q. Jadual di bawah menunjukkan kandungan protein dan kalori bagi segelas minuman itu.
- | | Minuman P | Minuman Q |
|---------------|-----------|-----------|
| Protein (g) | 6 | 4 |
| Kalori (kcal) | 95 | 110 |
- Pelan diet itu mencadangkan Syahirah supaya mengambil sejumlah 16 g protein dan 300 kcal setiap hari daripada dua jenis minuman ini.
- (a) Bentuk dua persamaan linear daripada maklumat di atas.
 (b) Hitung bilangan gelas minuman P dan minuman Q yang perlu diminum oleh Syahirah setiap hari mengikut pelan diet ini dengan menggunakan kaedah matriks.
16. Encik Sanjay menjual dua jenama pendingin hawa, K dan L. Harga pendingin hawa jenama K dan L ialah RM1 500 dan RM2 000. Komisen menjual sebuah pendingin hawa jenama K dan L ialah 3% dan 4%. Pada bulan Mei, Encik Sanjay menjual 50 unit pendingin hawa dan mendapat komisen sejumlah RM2 880. Hitung bilangan pendingin hawa jenama K dan L yang dijual dengan menggunakan kaedah matriks.



Kriptografi ialah sains keselamatan informasi. Kriptografi melibatkan teknik seperti menggabungkan perkataan ke dalam bentuk imej atau menulis perkataan dalam kod rahsia supaya perkataan itu tidak dapat dibaca oleh pihak ketiga. Pada masa Perang Dunia Kedua, tentera Jerman menggunakan mesin Enigma untuk menulis mesej rahsia tentera mereka. Tiga orang ahli matematik dari Poland berjaya menyahsilit (*decrypt*) mesej daripada mesin Enigma dan membantu Kuasa Bersekutu menamatkan perang.

Gunakan sistem kod di bawah, hantar mesej "GURU KELAS" kepada rakan anda.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?	.
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Ikuti langkah-langkah berikut.

- Tuliskan mesej tersebut dalam beberapa matriks peringkat 2×1 .
- Gunakan mangga $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ untuk menyulitkan (*encrypt*) mesej, iaitu matriks M didarab dengan setiap matriks yang terbentuk di (a).
- Hasil darab yang diperoleh akan ditukar kepada mesej rahsia dalam huruf berdasarkan sistem kod di atas dan dihantar kepada rakan. Jika hasil darab ialah nombor negatif, tambahkan hasil darab itu dengan 30.
- Apabila menerima mesej rahsia, rakan perlu menyahsilit (*decrypt*) mesej berdasarkan langkah-langkah yang berikut:
 - tuliskan mesej rahsia yang diperoleh dalam beberapa matriks peringkat 2×1 .
 - darabkan kunci $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan setiap matriks yang terbentuk di (d)(i).
 - hasil darab yang diperoleh ditukar kepada mesej yang sebenarnya dengan merujuk sistem kod di atas. Jika hasil darab ialah nombor negatif, tambahkan hasil darab itu dengan 30.

Tip bagi langkah-langkah:

- Contohnya, mesej "DI BAS", huruf "D" = 4, "I" = 9, " " = 0, "B" = 2, "A" = 1 dan "S" = 19. Maka matriks-matriks yang terbentuk ialah $\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix}$.
- Contohnya, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix}$.
- Contohnya, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Jadi, $\begin{bmatrix} -1 + 30 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Dengan merujuk sistem kod, $\begin{bmatrix} 29 \\ 4 \end{bmatrix}$ akan diwakili dengan $\begin{bmatrix} . \\ D \end{bmatrix}$.
Mesej rahsia penuh yang dihasilkan ialah "D? MA".