

BAB 2

PEMBEZAAN



Apakah yang akan dipelajari?

- Had dan Hubungannya dengan Pembezaan
- Pembezaan Peringkat Pertama
- Pembezaan Peringkat Kedua
- Aplikasi Pembezaan

Senarai
Standard
Pembelajaran



bit.ly/2EOtFa4

Bakteria boleh menyebabkan pelbagai jenis penyakit berbahaya dan mengancam kehidupan kita. Bakteria menghasilkan toksin yang boleh merosakkan makanan. Makanan yang dicemari oleh bakteria akan mengakibatkan keracunan makanan dan boleh membawa maut jika tidak dirawat dengan segera. Antara penyakit yang menyerang manusia akibat bakteria ialah tifoid, demam dan pneumonia. Tahukah anda, rumus bagi bilangan pertumbuhan bakteria, p dengan populasi awal ialah 1 500 menggunakan rumus

$$p = 1\,500 \left(\frac{1 + 5t}{t^2 + 30} \right), \text{ dengan } t \text{ ialah}$$

masa, dalam jam? Bolehkah anda tentukan kadar pertumbuhan populasi bakteria selepas 3 jam? Masalah ini boleh diselesaikan dengan konsep pembezaan yang merupakan sebahagian daripada kalkulus.

Video mengenai pertumbuhan koloni bakteria.



bit.ly/364lw18

Sudut Maklumat

Isaac Newton (1643-1727 TM) dan Gottfried Von Leibniz (1646-1716 TM) merupakan ahli matematik yang mula mempelopori prinsip asas kalkulus yang terdiri daripada pembezaan dan pengamiran.

Kalkulus berasal daripada perkataan Latin yang bermaksud batu kecil yang digunakan untuk menghitung dan menyelesaikan suatu permasalahan matematik pada zaman dahulu.

Untuk maklumat lanjut:



bit.ly/2KFSrgc



Kepentingan Bab Ini

- Sebuah LRT (*Light Rapid Transit*) yang bergerak dengan kadar perubahan sesaran terhadap masa menunjukkan halaju seketika bagi LRT itu manakala kadar perubahan halaju terhadap masa menunjukkan pecutan seketika.
- Konsep pembezaan digunakan untuk menentukan peredaran darah dalam arteri pada masa tertentu serta jangka masa bagi penyakit tumor membesar dan mengecil di dalam badan manusia.

Kata Kunci

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| ● Had | <i>Limit</i> |
| ● Terbitan pertama | <i>First derivative</i> |
| ● Kecerunan tangen | <i>Gradient of tangent</i> |
| ● Terbitan kedua | <i>Second derivative</i> |
| ● Persamaan tangen | <i>Equation of tangent</i> |
| ● Persamaan normal | <i>Equation of normal</i> |
| ● Titik pusingan | <i>Turning point</i> |
| ● Kadar perubahan | <i>Rate of change</i> |
| ● Penghampiran | <i>Approximation</i> |
| ● Titik pegun | <i>Stationary point</i> |
| ● Titik lengkok balas | <i>Point of inflection</i> |

2.1 Had dan Hubungannya dengan Pembezaan

Had merupakan konsep asas dalam operasi pembezaan seperti halaju, v suatu objek pada masa t yang disebut sebagai halaju seketika. Misalnya, semasa pemanduan, bacaan pada meter laju kenderaan anda menunjukkan halaju 80 kmj^{-1} .

Apakah yang dimaksudkan dengan bacaan halaju 80 kmj^{-1} pada meter laju itu? Bagaimanakah nilai 80 kmj^{-1} ini diperoleh? Dengan kaedah had, kita boleh menentukan nilai tersebut melalui nilai penghampiran.

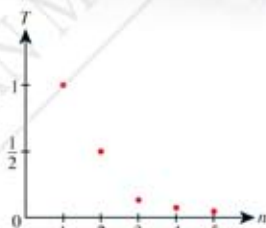


Nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubah menghampiri sifar

Pertimbangkan jujukan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ dengan sebutan amnya,

$$T_n = \frac{1}{n}, \text{ dengan keadaan } n = 1, 2, 3, \dots$$

Perhatikan graf bagi jujukan itu seperti dalam rajah di sebelah. Apabila n semakin meningkat tanpa batas, apakah yang akan terjadi kepada sebutan, T jujukan itu? Adakah sebutannya semakin menghampiri sifar tetapi bukan sifar? Bolehkah anda tentukan had bagi jujukan ini?



Ikuti penerokaan berikut untuk meneroka nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubahnya menghampiri sifar pula.

Aktiviti Penerokaan

1

Berkumpulan

Tujuan: Meneroka had suatu fungsi apabila pemboleh ubahnya menghampiri sifar

Langkah:

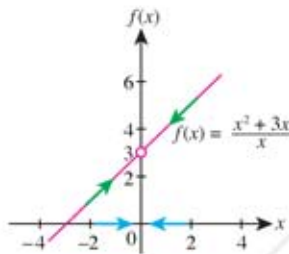
- Pertimbangkan fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$, dengan domainnya ialah set semua nombor nyata, $\mathbb{R}$ kecuali sifar.
- Tentukan nilai bagi $f(0)$. Adakah anda boleh memperoleh nilai tersebut? Jelaskan.
- Salin dan lengkapkan jadual di bawah bagi fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ apabila x menghampiri sifar dari arah kiri dan arah kanan. Seterusnya, lakarkan graf $y = f(x)$ dan tentukan nilai bagi had $\frac{x^2 + 3x}{x}$.

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

- Apakah yang anda boleh katakan tentang keputusan nilai $f(0)$ yang diperoleh dalam langkah 2 dengan nilai had $\frac{x^2 + 3x}{x}$ yang diperoleh dalam langkah 3? Bincangkan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa nilai bagi $f(0)$ tidak dapat ditentukan kerana menghasilkan suatu bentuk tak tentu, iaitu $\frac{0}{0}$. Oleh sebab had tidak dapat ditentukan secara penggantian langsung, maka nilai bagi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$ boleh ditentukan seperti yang ditunjukkan dalam jadual dan rajah yang berikut.

x	$f(x)$
-0.1	2.9
-0.01	2.99
-0.001	2.999
-0.0001	2.9999
$\vdots$	$\vdots$
0.0001	3.0001
0.001	3.001
0.01	3.01
0.1	3.1



Klik Teknologi

Dengan menggunakan kalkulator grafik, lukis graf bagi fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ dan anggarkan nilai bagi had $f(x)$. Adakah fungsi f tertakrif di $x = 0$?
Bincangkan kesannya pada kewujudan had apabila x menghampiri sifar.

Berdasarkan jadual dan rajah di atas, apabila nilai x semakin menghampiri sifar sama ada dari arah kiri atau kanan, nilai $f(x)$ menghampiri 3. Jadi, apabila x menghampiri sifar dari salah satu arah, fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ menghampiri 3, iaitu apabila $x \rightarrow 0$, $\frac{x^2 + 3x}{x} \rightarrow 3$. Nilai 3 disebut sebagai had bagi $\frac{x^2 + 3x}{x}$ apabila x menghampiri sifar dan pernyataan ini boleh diringkaskan dengan tatatanda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = 3$$

Secara amnya,

Apabila x menghampiri a , dengan keadaan $x \neq a$,
had bagi $f(x)$ ialah L dan ditulis sebagai $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Cara-cara untuk menentukan had $f(x)$, dengan $a \in \mathbb{R}$ adalah seperti yang berikut:

Tentukan nilai had $f(x)$ dengan menggantikan nilai $x = a$ secara langsung ke dalam fungsi $f(x)$. Jika,

$$f(a) \neq \frac{0}{0}$$

Nilai had $f(x)$ telah diperolehi,
iaitu had $f(x) = f(a)$.

$$f(a) = \frac{0}{0}$$

Tentukan had $f(x)$ dengan cara:

- Pemfaktoran
- Merasionalkan pengangka atau penyebut fungsi itu.

Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x}}{x + 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Penyelesaian

- (a) Gunakan penggantian secara langsung.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x}}{x + 2} = \frac{3 - \sqrt{4}}{4 + 2} = \frac{3 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$

- (b) Apabila $x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ adalah dalam bentuk tak tentu, $\frac{0}{0}$.

Jadi, lakukan pemfaktoran dan hapuskan faktor sepunya sebelum melakukan penggantian secara langsung.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Faktorkan pengangka dan hapuskan faktor sepunya

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1$$

Penggantian langsung

$$= 2$$

- (c) Apabila melakukan penggantian langsung, bentuk tak tentu, $\frac{0}{0}$ akan diperoleh. Jadi, rasionalkan pengangka bagi pecahan dengan mendarabkannya dengan konjugat, iaitu $\sqrt{x+1} + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right) \right]$$

Darabkan dengan konjugat bagi pengangka

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

Hapuskan faktor sepunya

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1}$$

Penggantian langsung

$$= \frac{1}{1 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$



Klik Teknologi

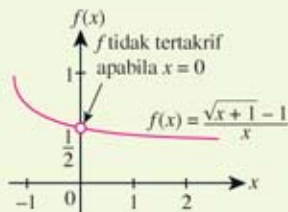
Lakarkan graf bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$

(b) $f(x) = x + 1$

Daripada graf, cari had bagi setiap fungsi itu apabila x menghampiri 1.

Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, lukis graf bagi setiap fungsi itu. Adakah perisian tersebut dapat membezakan kedua-dua graf itu? Jelaskan jawapan anda.

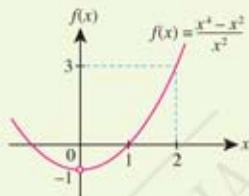


Contoh 2

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2}, x \neq 0. \text{ Berdasarkan graf, cari}$$

- (a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



Penyelesaian

- (a) Didapati bahawa tiada titik di $x = 0$. Maka, $f(0)$ tidak tertakrif di $x = 0$.
 (b) Apabila $x \rightarrow 0$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \rightarrow -1$. Maka, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.
 (c) Apabila $x \rightarrow 2$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \rightarrow 3$. Maka, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Latihan Kendiri 2.1

1. Cari had bagi setiap fungsi yang berikut apabila $x \rightarrow 0$.

- (a) $x^2 + x - 3$ (b) $\sqrt{x+1}$ (c) $\frac{x+4}{x-2}$ (d) $\frac{a}{ax+a}$

2. Tentukan had bagi setiap fungsi yang berikut.

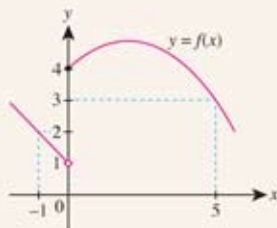
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 1)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{10 - 2x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{x^2 - 36}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{2x^2 - x}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{2x+3}}{x - 3}$ (i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{5x+14} - 2}$

3. Cari nilai bagi setiap had yang berikut.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 4x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3 - \sqrt{x+9}}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{8-x}}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi $y = f(x)$.

- (a) Berdasarkan graf,
 (i) cari $f(0)$,
 (ii) tentukan sama ada $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ wujud atau tidak. Jelaskan.
 (b) Seterusnya, cari
 (i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$





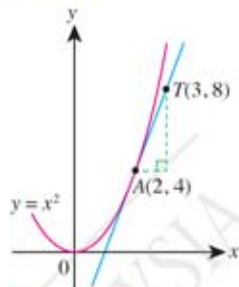
Terbitan pertama suatu fungsi $f(x)$ melalui pembezaan dengan prinsip pertama

Tangen kepada suatu lengkung di suatu titik ialah satu garis lurus yang menyentuh lengkung pada titik itu. Dalam rajah di sebelah, garis lurus AT dengan koordinat A dan T masing-masing ialah $(2, 4)$ dan $(3, 8)$ ialah tangen kepada lengkung $y = x^2$ di titik A .

$$\text{Kecerunan tangen } AT = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = 4$$

Bagaimanakah cara untuk mencari kecerunan tangen bagi lengkung $y = x^2$ di titik yang lain pula, misalnya $B(3, 9)$?

Kecerunan bagi suatu lengkung menggunakan graf adalah sukar untuk ditentukan dan hasilnya tidak begitu tepat. Terdapat kaedah lain yang boleh digunakan untuk mencari kecerunan bagi suatu lengkung pada titik tertentu, iaitu dengan menggunakan idea had seperti dalam penerokaan berikut.



Sudut Informasi

Kecerunan lengkung juga dikenali sebagai kecerunan tangen.

Aktiviti Penerokaan

2

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Meneroka fungsi kecerunan tangen dan kecerunan tangen kepada lengkung $y = x^2$ pada titik $B(3, 9)$ dengan menggunakan idea had

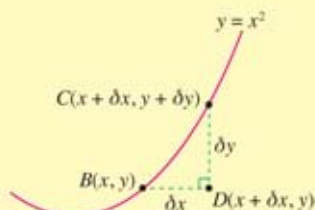
Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $y = x^2$ dan garis lurus yang melalui titik $B(3, 9)$ dan titik $C(4, 16)$ pada graf tersebut.
3. Nilai $m = 7$ mewakili kecerunan bagi garis lurus BC .
4. Gerakkan titik C menghampiri titik B dan perhatikan perubahan pada nilai m .
5. Catatkan perubahan nilai m apabila titik C menghampiri titik B .
6. Katakan koordinat $B(3, 9)$ ialah (x, y) dan koordinat $C(4, 16)$ ialah $(x + \delta x, y + \delta y)$, dengan δx mewakili perubahan dalam nilai x dan δy mewakili perubahan dalam nilai y . Salin dan lengkapkan jadual berikut.



ggbm.at/z7kumqkk

δx	$x + \delta x$	$y + \delta y$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$
1	4	16	7	7
0.5	3.5	12.25	3.25	
0.05				
0.005				



7. Apabila δx menghampiri 0, apakah yang berlaku pada nilai $\frac{\delta y}{\delta x}$? Bandingkan keputusannya dengan keputusan yang diperoleh dalam langkah 5.

Daripada Aktiviti Penerokaan 2, perhatikan bahawa $B(x, y)$ dan $C(x + \delta x, y + \delta y)$ ialah dua titik berhampiran pada lengkung $y = x^2$.

Jadi,

$$\begin{aligned}\text{Kecerunan garis lurus } BC &= \frac{CD}{BD} \\ &= \frac{(y + \delta y) - y}{(x + \delta x) - x} \\ &= \frac{\delta y}{\delta x}\end{aligned}$$

Apabila titik C menghampiri titik B di sepanjang lengkung, garis lurus BC berubah dan menjadi BC_1 , seterusnya menjadi BC_2 , iaitu nilai bagi δx semakin kecil dan menghampiri sifar, $\delta x \rightarrow 0$. Apabila titik C berada di atas titik B , garis lurus menjadi tangen di titik B . Oleh itu,

$$\begin{aligned}\text{Kecerunan lengkung di } B &= \text{Kecerunan tangen } BT \\ &= \text{Nilai bagi } \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}\end{aligned}$$

Maka, bagi lengkung $y = f(x)$, fungsi kecerunan tangennya pada sebarang titik boleh ditentukan dengan mencari $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$.
 $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ disebut sebagai terbitan pertama bagi fungsi terhadap x dan ditandakan dengan simbol $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Fungsi kecerunan tangen $\frac{dy}{dx}$ ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan tangen kepada suatu lengkung $y = f(x)$ pada sebarang titik $(x, f(x))$.

Misalnya, pertimbangkan semula lengkung $y = f(x) = x^2$.

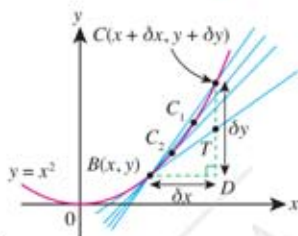
$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= (x + \delta x)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x(\delta x) + (\delta x)^2 \\ \frac{\delta y}{\delta x} &= \frac{2x(\delta x) + (\delta x)^2}{\delta x}\end{aligned}$$

Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan δx

Maka,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} (2x + \delta x) \\ &= 2x + 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 2x\end{aligned}$$

Fungsi kecerunan tangen



GALERI SEJARAH



Konsep had bagi suatu fungsi mula diperkenalkan secara eksplisit oleh Sir Isaac Newton. Beliau menyatakan bahawa had ialah konsep asas dalam kalkulus dan menjelaskan konsep utama had ialah "mendekati dengan lebih dekat daripada sebarang perbezaan yang diberikan".

Sudut Informasi

- Simbol δx dibaca sebagai "delta x" yang mewakili token kecil dalam x .
- Simbol δy dibaca sebagai "delta y" yang mewakili token kecil dalam y .

Tip Pintar

$\frac{dy}{dx}$ bukan bermaksud dy bahagi dengan dx tetapi $\frac{dy}{dx}$ ialah simbol bagi had $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ apabila $\delta x \rightarrow 0$.

Jadi, kecerunan tangen kepada lengkung $y = x^2$ pada titik $B(3, 9)$ ialah $\frac{dy}{dx} = 2x = 2(3) = 6$.

Secara amnya, proses untuk menentukan fungsi kecerunan $\frac{dy}{dx}$ atau terbitan pertama bagi suatu fungsi $y = f(x)$ dengan menggunakan idea $\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ seperti ini disebut sebagai **pembezaan dengan prinsip pertama**.

Contoh 3

Cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.

(a) $y = 3x$

(b) $y = 3x^2$

(c) $y = 3x^3$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = f(x) = 3x$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \delta x) - 3x \\ &= 3x + 3\delta x - 3x \\ &= 3\delta x\end{aligned}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 3\end{aligned}$$

(b) Diberi $y = f(x) = 3x^2$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \delta x)^2 - 3x^2 \\ &= 3[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^2 \\ &= 3x^2 + 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2 - 3x^2 \\ &= 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 6x + 3\delta x$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} (6x + 3\delta x) \\ &= 6x + 3(0) \\ \frac{dy}{dx} &= 6x\end{aligned}$$

(c) Diberi $y = f(x) = 3x^3$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \delta x)^3 - 3x^3 \\ &= 3(x + \delta x)(x + \delta x)^2 - 3x^3 \\ &= 3(x + \delta x)[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^3 \\ &= 3[x^3 + 2x^2(\delta x) + x(\delta x)^2 + x^2(\delta x) + 2x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3 \\ &= 3[x^3 + 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3 \\ &= 3x^3 + 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3 - 3x^3 \\ &= 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3\end{aligned}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} [9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2] \\ &= 9x^2 + 9x(0) + 3(0)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 9x^2\end{aligned}$$



Langkah-langkah untuk menentukan $\frac{dy}{dx}$ bagi sebarang fungsi $f(x)$ dengan prinsip pertama.

1. Pertimbangkan dua titik $A(x, y)$ dan $B(x + \delta x, y + \delta y)$ pada lengkung.
2. Tentukan δy dengan $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.
3. Dapatkan nisbah $\frac{\delta y}{\delta x}$.
4. Ambil had bagi $\frac{\delta y}{\delta x}$ apabila $\delta x \rightarrow 0$.

Latihan Kendiri 2.2

- Cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.

(a) $y = x$	(b) $y = 5x$	(c) $y = -4x$	(d) $y = 6x^2$
(e) $y = -x^2$	(f) $y = 2x^3$	(g) $y = \frac{1}{2}x^2$	(h) $y = \frac{1}{x}$
- Diberi $y = 2x^2 - x + 7$, cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama.
- Dengan menggunakan prinsip pertama, cari fungsi kecerunan bagi lengkung $y = 3 + x - x^2$.

Latihan Formatif

2.1

Kuiz

bit.ly/36m2zn



- Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

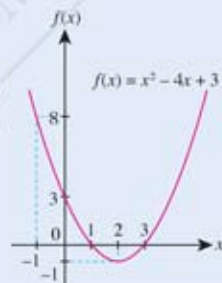
(a) Daripada graf, cari setiap yang berikut.

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (i) had $f(x)$
$x \rightarrow -1$ | (ii) had $f(x)$
$x \rightarrow 0$ | (iii) had $f(x)$
$x \rightarrow 1$ |
| (iv) had $f(x)$
$x \rightarrow 2$ | (v) had $f(x)$
$x \rightarrow 3$ | (vi) had $f(x)$
$x \rightarrow 4$ |

(b) Cari nilai-nilai yang mungkin bagi a jika had $f(x) = 8$.

(c) (i) Tentukan fungsi kecerunan tangen, $\frac{dy}{dx}$ bagi graf itu dengan menggunakan prinsip pertama.

(ii) Seterusnya, tentukan kecerunan tangen pada titik (4, 3).



- Cari nilai bagi setiap had yang berikut.

- | | | |
|--|---|---|
| (a) had $(x^2 - 6x + 9)$
$x \rightarrow 0$ | (b) had $\sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$
$x \rightarrow 2$ | (c) had $\frac{9-x}{x^2-81}$
$x \rightarrow 9$ |
| (d) had $\frac{x^2-x-2}{x-2}$
$x \rightarrow 2$ | (e) had $\frac{x^3-x}{x-1}$
$x \rightarrow 1$ | (f) had $\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$
$x \rightarrow 5$ |

- Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) had $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{x}$
$x \rightarrow 0$ | (b) had $\frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$
$x \rightarrow 4$ | (c) had $\frac{x^2-5x+6}{2-\sqrt{x+1}}$
$x \rightarrow 3$ |
|--|---|--|

- (a) Diberi bahawa had $\frac{x^2-k}{3x-6} = \frac{4}{3}$, cari nilai k .

(b) Jika had $\frac{x^2-2x-h}{kx+2} = -2$, cari nilai bagi $h+k$.

- Bezakan fungsi berikut terhadap x dengan menggunakan prinsip pertama.

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| (a) $y = 5x - 8$ | (b) $y = x^2 - x$ | (c) $y = (x+1)^2$ | (d) $y = \frac{1}{4x}$ |
|------------------|-------------------|-------------------|------------------------|

- Sesaran, s m, bagi seekor tupai yang berlari pada kabel lurus selepas t saat diberi oleh $s(t) = t^2 - 3t$, dengan keadaan $t \geq 0$. Menggunakan prinsip pertama, cari halaju tupai itu apabila $t = 5$.





Rumus terbitan pertama bagi fungsi $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer

Perhatikan semula Contoh 3 pada halaman 36. Terbitan pertama bagi fungsi $y = 3x$, $y = 3x^2$ dan $y = 3x^3$ dengan prinsip pertama adalah mengikut pola seperti dalam jadual di sebelah.

Daripada pola yang diperoleh, bagi fungsi $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, kita boleh menerbitkan rumus terbitan pertama bagi fungsi itu secara induktif seperti yang berikut.

Jika $y = ax^n$, maka $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$ atau $\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$

Tiga tatatanda yang boleh digunakan untuk menerangkan terbitan pertama suatu fungsi $y = ax^n$ adalah seperti yang berikut.



- Bagi $y = ax^n$,
- Jika $n = 1$, $\frac{dy}{dx} = a$
 - Jika $n = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$

1 Jika $y = 3x^2$, maka $\frac{dy}{dx} = 6x$ $\frac{dy}{dx}$ disebut sebagai pembezaan y terhadap x .

2 Jika $f(x) = 3x^2$, maka $f'(x) = 6x$ $f'(x)$ dikenali sebagai fungsi kecerunan bagi lengkung $y = f(x)$ kerana fungsi ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan lengkung pada sebarang titik.

3 $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$ Jika bezakan $3x^2$ terhadap x , hasilnya ialah $6x$.



Menentukan terbitan pertama bagi suatu fungsi algebra

Ikuti penerokaan berikut untuk melihat perbandingan antara graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$ menggunakan perisian geometri dinamik Desmos.

Aktiviti Penerokaan

3

Berkumpulan

STEM

PK

Tujuan: Membandingkan graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$

Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $f(x) = x^2$ yang terpapar pada satah.
3. Klik butang $(a, f(a))$ untuk melihat koordinat titik sentuh antara graf $f(x)$ dengan garis tangennya.
4. Kemudian, klik butang $f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$ untuk melihat graf $f'(x)$, iaitu graf fungsi kecerunan bagi $f(x)$. Seterusnya, klik butang $(a, f'(a))$ untuk melihat koordinat titik pada graf $f'(x)$.



bit.ly/2F0q2bu

- Seret gelongsor a untuk mengubah titik sentuh antara lengkung $f(x)$ dengan garis tangennya.
- Bandingkan graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$. Apakah yang anda boleh katakan tentang kedua-dua graf ini apabila nilai a berubah?
- Salin dan lengkapkan jadual di bawah untuk mencari kecerunan lengkung $y = x^2$ pada koordinat- x yang diberi. Kecurutan lengkung boleh diperoleh dengan melihat koordinat- y pada titik di graf $f'(x)$.

Koordinat- x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Kecerunan lengkung							

- Dengan menggunakan rumus terbitan pertama yang telah dipelajari, tentukan fungsi $f'(x)$. Seterusnya, gantikan nilai-nilai koordinat- x daripada jadual di atas ke dalam fungsi $f'(x)$ untuk menyemak dan mengesahkan kecerunan lengkung yang diperoleh dalam langkah 7.
- Teruskan penerokaan anda dengan fungsi yang lain seperti fungsi kubik, seterusnya bandingkan jenis serta bentuk graf fungsi itu dengan graf fungsi kecerunannya.
- Buat satu kesimpulan berdasarkan hasil dapatan anda.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, didapati bahawa:

- Perbandingan antara graf $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$ bagi tiga fungsi polinomial dalam bentuk $y = f(x) = ax^n$, dengan $a = 1$ dan kuasa tertinggi polinomial, $n = 1, 2$ dan 3 dapat dirumuskan seperti berikut.

Graf $y = f(x) = x$ dan $y = f'(x) = 1$	Graf $y = f(x) = x^2$ dan $y = f'(x) = 2x$	Graf $y = f(x) = x^3$ dan $y = f'(x) = 3x^2$

- Langkah-langkah untuk menentukan kecerunan bagi lengkung $f(x)$ pada suatu titik pula adalah seperti berikut.

Cari fungsi kecerunan $f'(x)$ bagi fungsi $f(x) = ax^n$ terlebih dahulu dengan menggunakan rumus berikut:

Jika $f(x) = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, maka $f'(x) = anx^{n-1}$.



Gantikan nilai x ke dalam fungsi kecerunan itu.

Proses untuk menentukan fungsi kecerunan $f'(x)$ bagi suatu fungsi $y = f(x)$ disebut sebagai **pembezaan**. Fungsi kecerunan juga dikenali sebagai **terbitan pertama** bagi suatu fungsi atau fungsi terbitan atau **pekali pembezaan** y terhadap x .

Contoh 4

Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $-\frac{2}{3}x^6$

(b) $y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

(c) $f(x) = \frac{3}{8x^2}$

Penyelesaian

(a) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -\frac{2}{3}(6x^{6-1})$

$= -\frac{2}{3}(6x^5)$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -4x^5$

(b) $y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

$= \frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)$

$= \frac{1}{10}x^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \frac{3}{8x^2}$

$= \frac{3}{8}x^{-2}$

$f'(x) = \frac{3}{8}(-2x^{-2-1})$

$= -\frac{3}{4}x^{-3}$

$f'(x) = -\frac{3}{4x^3}$

Contoh 5

(a) Jika $f(x) = \frac{3}{4}x^4$, cari $f'(-1)$ dan $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

(b) Diberi bahawa $y = 9\sqrt[3]{x}$, cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 8$.

Penyelesaian

(a) $f(x) = \frac{3}{4}x^4$

$f'(x) = \frac{3}{4}(4x^{4-1})$

$= 3x^3$

$f'(-1) = 3(-1)^3$

$= -3$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$= \frac{1}{9}$

(b) $y = 9\sqrt[3]{x}$

$= 9x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = 9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right)$

$= 3x^{-\frac{2}{3}}$

Apabila $x = 8$, $\frac{dy}{dx} = 3(8)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{3}{4}$



Sudut Informasi

Fungsi kecerunan bagi suatu lengkung ialah suatu fungsi manakala kecerunan bagi suatu lengkung pada titik tertentu pula ialah suatu nilai berangka.

Misalnya, bagi lengkung $y = 2x^3$, fungsi kecerunannya ialah $\frac{dy}{dx} = 2(3x^{3-1}) = 6x^2$ dan kecerunannya pada titik $(1, 2)$ ialah $\frac{dy}{dx} = 6(1)^2 = 6$.

Terbitan bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan atau penolakan sebutan-sebutan algebra pula boleh diperoleh dengan membezakan fungsi itu sebutan demi sebutan secara berasingan.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ ialah suatu fungsi, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Contoh 6

Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $5x^3 + \frac{3}{4}x^4$

(b) $x(\sqrt{x} - 9)$

(c) $\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{dx} \left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4 \right) &= \frac{d}{dx} (5x^3) + \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{4}x^4 \right) \\ &= 5(3x^{3-1}) + \frac{3}{4}(4x^{4-1}) \\ \frac{d}{dx} \left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4 \right) &= 15x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

Bezakan setiap sebutan secara berasingan

(b) Katakan $f(x) = x(\sqrt{x} - 9)$

$$\begin{aligned} &= x^{\frac{1}{2}} - 9x \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 9(1x^{1-1}) \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 9 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - 9 \end{aligned}$$

Bezakan setiap sebutan secara berasingan

(c) Katakan $y = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x^2 - x - 1}{x} \\ &= 2x - 1 - x^{-1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (2x) - \frac{d}{dx} (1) - \frac{d}{dx} (x^{-1}) \\ &= 2x^{1-1} - 0x^{0-1} - (-1x^{-1-1}) \\ &= 2 + x^{-2} \\ \frac{dy}{dx} &= 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Bezakan setiap sebutan secara berasingan

Latihan Kendiri 2.3

1. Cari terbitan pertama bagi setiap fungsi yang berikut terhadap x .

(a) $\frac{4}{5}x^{10}$

(b) $-2x^4$

(c) $\frac{3}{4x^8}$

(d) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

(e) $-12\sqrt[3]{x^2}$

2. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x .

(a) $4x^2 + 6x - 1$

(b) $\frac{4}{5}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

(c) $(9 - 4x)^2$

3. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x .

(a) $y = 4x^2(5 - \sqrt{x})$

(b) $y = \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^2$

(c) $y = \frac{(4x-1)(1-x)}{\sqrt{x}}$

4. Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x yang diberi.

(a) $y = x^2 - 2x, x = \frac{1}{2}$

(b) $y = \sqrt{x}(2-x), x = 9$

(c) $y = \frac{x^2+4}{x^2}, x = 2$

Untuk membezakan fungsi $y = (2x + 3)^2$, kita kembangkan fungsi itu kepada $y = 4x^2 + 12x + 9$ terlebih dahulu sebelum membezakannya sebutan demi sebutan untuk memperoleh $\frac{dy}{dx} = 8x + 12$.

Bagaimanakah pula jika kita ingin membezakan fungsi $y = (2x + 3)^4$? Ungkapan $(2x + 3)^4$ adalah sangat rumit untuk dikembangkan melainkan jika kita pertimbangkan suatu fungsi sebagai gubahan bagi dua fungsi yang mudah. Mari teroka kaedah tersebut.

Aktiviti Penerokaan

4

Individu

Tujuan: Meneroka kaedah yang berlainan untuk membezakan suatu fungsi dalam bentuk $y = (ax + b)^n$, dengan keadaan $a \neq 0$

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = (2x + 3)^2$.
2. Kembangkan ungkapan $(2x + 3)^2$ dan tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan membezakannya sebutan demi sebutan secara berasingan.
3. Jika $u = 2x + 3$,
 - (a) ungkapkan y sebagai fungsi bagi u ,
 - (b) cari $\frac{du}{dx}$ dan $\frac{dy}{du}$,
 - (c) tentukan $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ dalam sebutan x dan ringkaskan jawapan anda.
4. Bandingkan kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah jawapannya sama? Kaedah manakah yang menjadi pilihan anda? Berikan sebab.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 4, didapati bahawa terdapat pelbagai cara untuk membezakan suatu fungsi seperti $y = (2x + 3)^2$. Namun, kaedah seperti yang ditunjukkan dalam langkah 3 adalah lebih mudah digunakan untuk memperoleh terbitan bagi suatu ungkapan dalam bentuk $(ax + b)^n$, dengan keadaan $a \neq 0$, yang sukar untuk dikembangkan.

Bagi fungsi $y = f(x) = (2x + 3)^2$:

Katakan, $u = h(x) = 2x + 3$

Jadi, $y = g(u) = u^2$

Dalam hal ini, y sebagai fungsi bagi u dan u sebagai fungsi bagi x . Jadi, kita katakan bahawa $y = f(x)$ ialah fungsi gubahan bagi $y = g(u)$ dan $u = h(x)$.

Untuk membezakan fungsi seperti ini, kita perkenalkan satu kaedah mudah yang dikenali sebagai **petua rantai**, iaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Akses QR

Pembuktian petua rantai dengan menggunakan idea had.



bit.ly/2t6tiW2

Sudut Informasi

Ungkapan $(2x + 3)^4$ boleh dikembangkan dengan menggunakan teorem Binomial.

Secara amnya, terbitan pertama bagi suatu fungsi gubahan adalah seperti berikut:

Jika $y = g(u)$ dan $u = h(x)$, maka pembezaan y terhadap x diberi oleh

$$f'(x) = g'(u) \times h'(x)$$

iaitu,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

BAB

2

Contoh 7

Bezakan setiap fungsi berikut terhadap x .

(a) $y = (3x^2 - 4x)^7$

(b) $y = \frac{1}{(2x + 3)^3}$

(c) $y = \sqrt{6x^2 + 8}$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 3x^2 - 4x$ dan $y = u^7$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 6x - 4$ dan $\frac{dy}{du} = 7u^6$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 7u^6(6x - 4) \\ &= 7(3x^2 - 4x)^6(6x - 4) \\ &= (42x - 28)(3x^2 - 4x)^6\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 14(3x - 2)(3x^2 - 4x)^6$$

(b) Katakan $u = 2x + 3$ dan $y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 2$ dan $\frac{dy}{du} = -3u^{-3-1} = -\frac{3}{u^4}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{3}{u^4}(2)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{(2x + 3)^4}$$

(c) Katakan $u = 6x^2 + 8$ dan $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 12x$ dan $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(12x) \\ &= \frac{12x}{2\sqrt{6x^2 + 8}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{\sqrt{6x^2 + 8}}$$

Sudut Informasi

Secara amnya, bagi fungsi dalam bentuk $y = u^n$, dengan u ialah fungsi bagi x , maka $\frac{dy}{du} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$ atau $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$. Rumus ini boleh digunakan untuk mendapatkan pembezaan fungsi dalam Contoh 7 secara langsung.

Latihan Kendiri 2.4

1. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x .

(a) $(x + 4)^5$

(b) $(2x - 3)^4$

(c) $\frac{1}{3}(6 - 3x)^6$

(d) $(4x^2 - 5)^7$

(e) $\left(\frac{1}{6}x + 2\right)^8$

(f) $\frac{2}{3}(5 - 2x)^9$

(g) $(1 - x - x^2)^3$

(h) $(2x^3 - 4x + 1)^{-10}$

2. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x .

(a) $\frac{1}{3x+2}$

(b) $\frac{1}{(2x-7)^3}$

(c) $\frac{5}{(3-4x)^5}$

(d) $\frac{3}{4(5x-6)^8}$

(e) $\sqrt{2x-7}$

(f) $\sqrt{6-3x}$

(g) $\sqrt{3x^2+5}$

(h) $\sqrt{x^2-x+1}$

3. Cari nilai bagi $\frac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x atau nilai y yang diberi berikut.

(a) $y = (2x+5)^4, x = 1$

(b) $y = \sqrt{5-2x}, x = \frac{1}{2}$

(c) $y = \frac{1}{2x-3}, y = 1$



Terbitan pertama bagi suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dan hasil bahagi ungkapan algebra

Aktiviti Penerokaan

5

Individu

Tujuan: Meneroka dua kaedah berlainan untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = (x^2 + 1)(x - 4)^2$.

2. Kembangkan ungkapan $(x^2 + 1)(x - 4)^2$ dan tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan membezakan setiap sebutan secara berasingan.

3. Jika $u = x^2 + 1$ dan $v = (x - 4)^2$, cari

(a) $\frac{du}{dx}$ dan $\frac{dv}{dx}$,

(b) $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ dalam sebutan x .

4. Bandingkan dua kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah jawapannya sama? Kaedah manakah yang menjadi pilihan anda? Jelaskan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa terdapat lebih daripada satu cara untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra seperti fungsi $y = (x^2 + 1)(x - 4)^2$. Namun, bagi dua ungkapan algebra yang tidak boleh dikembangkan seperti $(x^2 + 1)\sqrt{x - 4}$, **petua hasil darab** seperti dalam langkah 3 ialah kaedah yang sesuai dan sering digunakan untuk melakukan pembezaan.

Secara amnya, rumus terbitan pertama bagi suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra, juga dikenali sebagai petua hasil darab adalah seperti berikut:

Jika u dan v ialah suatu fungsi bagi x , maka

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$



Akses QR

Pembuktian petua hasil darab dengan menggunakan idea had.



bit.ly/2rCVm2G



Tip Pintar

$$\frac{d}{dx}(uv) \neq \frac{du}{dx} \times \frac{dv}{dx}$$

Aktiviti Penerokaan 6

Individu

Tujuan: Meneroka dua kaedah berlainan untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil bahagi dua ungkapan algebra

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.
2. Tulis semula fungsi $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ sebagai $y = x(x-1)^{-2}$ dan tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan petua hasil darab.
3. Jika $u = x$ dan $v = (x-1)^2$, cari
 - (a) $\frac{du}{dx}$ dan $\frac{dv}{dx}$,
 - (b) $\frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ dalam sebutan x .
4. Bandingkan kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah anda memperoleh jawapan yang sama?
5. Kemudian, nyatakan kaedah yang menjadi pilihan anda. Berikan sebab.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 6, didapati bahawa selain daripada menggunakan petua hasil darab untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil bahagi dua ungkapan algebra seperti $y = \frac{x}{(x-1)^2}$, kita boleh membezakannya secara langsung dengan menggunakan **petua hasil bahagi** seperti dalam langkah 3.

Secara amnya, petua hasil bahagi adalah seperti berikut:

Jika u dan v ialah fungsi bagi x dan $v(x) \neq 0$, maka

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh 8

Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $(x^2 + 1)(x - 3)^4$ (b) $(3x + 2)\sqrt{4x - 1}$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = (x^2 + 1)(x - 3)^4$.

Jadi, $u = x^2 + 1$

dan $v = (x - 3)^4$

Kita peroleh, $\frac{du}{dx} = 2x$

dan $\frac{dv}{dx} = 4(x - 3)^{4-1} \frac{d}{dx}(x - 3)$
 $= 4(x - 3)^3$



PERBINCANGAN

Dengan menggunakan idea had, buktikan petua hasil bahagi.



Tip Pintar

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \neq \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$



Sudut Informasi

Petua hasil darab dan petua hasil bahagi masing-masing boleh ditulis seperti yang berikut.

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

dengan u dan v masing-masing ialah fungsi bagi x .

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= (x^2 + 1) \times 4(x - 3)^3 + (x - 3)^4 \times 2x \\ &= 4(x^2 + 1)(x - 3)^3 + 2x(x - 3)^4 \\ &= 2(x - 3)^3 [2(x^2 + 1) + x(x - 3)] \\ \frac{dy}{dx} &= 2(x - 3)^3 (3x^2 - 3x + 2)\end{aligned}$$

(b) Diberi $y = (3x + 2)\sqrt{4x - 1}$.

Jadi, $u = 3x + 2$

dan $v = \sqrt{4x - 1} = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$

Kita peroleh, $\frac{du}{dx} = 3$

$$\begin{aligned}\text{dan } \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{2} (4x - 1)^{\frac{1}{2} - 1} \frac{d}{dx} (4x - 1) \\ &= \frac{1}{2} (4x - 1)^{-\frac{1}{2}} (4) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x - 1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= (3x + 2) \times \frac{2}{\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x - 1} \times 3 \\ &= \frac{2(3x + 2)}{\sqrt{4x - 1}} + 3\sqrt{4x - 1} \\ &= \frac{2(3x + 2) + 3(4x - 1)}{\sqrt{4x - 1}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{18x + 1}{\sqrt{4x - 1}}\end{aligned}$$

PERBINCANGAN

1. Bezakan $x(1 - x^2)^2$ terhadap x dengan menggunakan dua kaedah yang berbeza. Adakah anda memperoleh jawapan yang sama?
2. Diberi $y = 3(2x - 1)^4$, cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan (a) petua rantai, (b) petua hasil darab. Petua manakah yang menjadi pilihan anda?

Akses QR

Semak jawapan dalam Contoh 8 dengan menggunakan kalkulator petua hasil darab.



ggbm.at/CHferuJC

Contoh 9

Diberi $y = x\sqrt{x + 3}$, cari

(a) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$

(b) kecerunan tangen pada $x = 6$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = x$ dan $v = \sqrt{x + 3}$.

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } \frac{dy}{dx} &= x \frac{d}{dx} (\sqrt{x + 3}) + \sqrt{x + 3} \frac{d}{dx} (x) \\ &= x \left(\frac{1}{2\sqrt{x + 3}} \right) + \sqrt{x + 3} \\ &= \frac{x + 2(x + 3)}{2\sqrt{x + 3}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3(x + 2)}{2\sqrt{x + 3}}\end{aligned}$$

(b) Apabila $x = 6$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{3(6 + 2)}{2\sqrt{6 + 3}} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4\end{aligned}$$

Maka, kecerunan tangen pada $x = 6$ ialah 4.

Contoh 10

(a) Diberi $y = \frac{2x+1}{x^2-3}$, cari $\frac{dy}{dx}$.

(b) Diberi $y = \frac{x}{\sqrt{4x-1}}$, tunjukkan bahawa $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{\sqrt{(4x-1)^3}}$.

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 2x+1$ dan $v = x^2-3$.

Jadi, $\frac{du}{dx} = 2$ dan $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{(x^2-3)(2) - (2x+1)(2x)}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{2x^2-6-(4x^2+2x)}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x-6}{(x^2-3)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2(x^2+x+3)}{(x^2-3)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{4x-1} \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(\sqrt{4x-1})}{(\sqrt{4x-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{4x-1} - \frac{2x}{\sqrt{4x-1}}}{4x-1} \\ &= \frac{(\sqrt{4x-1})(\sqrt{4x-1}) - 2x}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} \\ &= \frac{4x-1-2x}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} \\ &= \frac{2x-1}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2x-1}{\sqrt{(4x-1)^3}}\end{aligned}$$

Latihan Kendiri 2.5

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = 4x^2(5x+3)$

(b) $y = -2x^3(x+1)$

(c) $y = x^2(1-4x)^4$

(d) $y = x^2\sqrt{1-2x^2}$

(e) $y = (4x-3)(2x+7)^6$

(f) $y = (x+5)^3(x-4)^4$

2. Bezakan setiap yang berikut terhadap x dengan menggunakan petua hasil darab.

(a) $(1-x^2)(6x+1)$

(b) $\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

(c) $(x^3-5)(x^2-2x+8)$

3. Diberi $f(x) = x\sqrt{x-1}$, cari nilai bagi $f'(5)$.

4. Cari kecerunan tangen bagi lengkung $y = x\sqrt{x^2+9}$ di $x = 4$.

5. Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $\frac{3}{2x-7}$

(b) $\frac{3x}{4x+6}$

(c) $\frac{4x^2}{1-6x}$

(d) $\frac{x^3+1}{2x-1}$

(e) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

(f) $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

(g) $\frac{3x^2}{\sqrt{2x^2+3}}$

(h) $\sqrt{\frac{4x+1}{3x^2-7}}$

6. Cari nilai pemalar r dengan keadaan $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{x+5}\right) = \frac{r}{(x+5)^2}$



1. Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $9x^2 - \frac{3}{x^2}$

(b) $\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x} + 8$

(c) $5x + 4\sqrt{x} - 7$

(d) $\frac{10}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

(e) $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^2$

(f) $\frac{8x^2 + x}{\sqrt{x}}$

(g) $\frac{4}{9x^3} - \pi x + 6$

(h) $\sqrt{x}(2-x)$

2. Jika $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}}$, cari nilai bagi $f'(8)$.

3. Diberi $f(t) = \frac{6t^3}{\sqrt[3]{t}}$,

(a) permudahkan $f(t)$,

(b) cari $f'(t)$,

(c) cari nilai bagi $f'\left(\frac{1}{8}\right)$.

4. Diberi $s = 3t^2 + 5t - 7$, cari $\frac{ds}{dt}$ dan julat nilai t dengan keadaan $\frac{ds}{dt}$ adalah negatif.

5. Diberi $\frac{dy}{dx}$ bagi fungsi $y = ax^3 + bx^2 + 3$ pada titik $(1, 4)$ ialah 7, cari nilai a dan nilai b .

6. Cari koordinat titik pada fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ dengan keadaan $\frac{dy}{dx}$ ialah 3.

7. Diberi fungsi $h(x) = kx^3 - 4x^2 - 5x$, cari

(a) $h'(x)$, dalam sebutan k ,

(b) nilai k jika $h'(1) = 8$.

8. Cari $\frac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{6} - 1\right)^4$

(b) $y = \frac{1}{12}(10x - 3)^6$

(c) $y = \frac{8}{2 - 5x}$

(d) $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

(e) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 9x}}$

(f) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 6}$

9. Jika $y = \frac{24}{(3x - 5)^2}$, cari nilai bagi $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$.

10. Cari nilai bagi pemalar a dan pemalar b dengan keadaan $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(3x - 2)^3}\right) = -\frac{a}{(3x - 2)^b}$

11. Bezakan setiap yang berikut terhadap x .

(a) $4x(2x - 1)^5$

(b) $x^4(3x + 1)^7$

(c) $x\sqrt{x + 3}$

(d) $(x + 7)^5(x - 5)^3$

(e) $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

(f) $\frac{x}{\sqrt{4x + 1}}$

(g) $\frac{1}{x^2 + 2x + 7}$

(h) $\frac{1 - 2x^3}{x - 1}$

12. Tunjukkan bahawa jika $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$, maka $f'(x) = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$

13. Diberi $y = \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$, cari $\frac{dy}{dx}$ dan tentukan julat nilai x dengan keadaan semua nilai y dan $\frac{dy}{dx}$ adalah positif.

14. Diberi $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$, cari julat nilai x dengan keadaan y dan $\frac{dy}{dx}$ adalah negatif.

2.3 Pembezaan Peringkat Kedua



Terbitan kedua bagi fungsi algebra

Pertimbangkan fungsi kubik $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

Fungsi kubik bagi x

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

Pembezaan peringkat pertama

Fungsi kuadratik bagi x

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

Perhatikan bahawa pembezaan suatu fungsi $y = f(x)$ terhadap x di atas menghasilkan suatu fungsi x yang lain. Fungsi $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ ini dikenali sebagai terbitan pertama bagi fungsi

$y = f(x)$ terhadap x . Bagaimana pula jika kita ingin membezakan $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ terhadap x ?

Apabila fungsi $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dibezakan terhadap x , kita peroleh $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ atau $\frac{d}{dx}[f'(x)]$.

Fungsi ini ditulis sebagai $\frac{d^2y}{dx^2}$ atau $f''(x)$ dan disebut sebagai **terbitan kedua** bagi fungsi

$y = f(x)$ terhadap x . Secara amnya,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ atau } f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

Contoh 11

- (a) Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi fungsi $y = x^3 + \frac{4}{x^2}$.
 (b) Jika $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9$, cari $g''\left(\frac{1}{4}\right)$ dan $g''(-1)$.

Penyelesaian

$$(a) \quad y = x^3 + \frac{4}{x^2}$$

$$= x^3 + 4x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{8}{x^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 24x^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + \frac{24}{x^4}$$

$$(b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9$$

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 7$$

$$g''(x) = 12x + 6$$

$$\text{Maka, } g''\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) + 6$$

$$= 3 + 6$$

$$= 9$$

$$g''(-1) = 12(-1) + 6$$

$$= -12 + 6$$

$$= -6$$

Contoh 12

Diberi fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, cari nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = f''(x)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Jadi, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ dan $f''(x) = 6x + 4$.

$$f'(x) = f''(x)$$

$$3x^2 + 4x + 3 = 6x + 4$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ atau } x = 1$$

Maka, nilai-nilai x ialah $-\frac{1}{3}$ dan 1 .

Kuiz Pantas

Jika $y = 5x - 3$, cari

(a) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}$

Adakah $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$?

Jelaskan.

Latihan Kendiri 2.6

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$

(b) $y = 4x^2 - \frac{2}{x}$

(c) $y = (3x + 2)^8$

2. Cari $f'(x)$ dan $f''(x)$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$

(c) $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$

3. Diberi $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$, cari koordinat titik A yang mungkin dengan keadaan $\frac{dy}{dx} = 0$.

Seterusnya, cari nilai bagi $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik A itu.

Latihan Formatif 2.3

1. Jika $xy - 2x^2 = 3$, tunjukkan bahawa $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = y$.

2. Cari nilai $f'(1)$ dan $f''(1)$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $f(x) = 3x - 2x^3$

(b) $f(x) = x^2(5x - 3)$

(c) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2}$

3. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, cari $f'(3)$ dan $f''(-3)$.

4. Jika $a = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$, cari nilai-nilai t dengan keadaan $\frac{da}{dt} = \frac{d^2a}{dt^2}$.

5. Diberi fungsi $g(x) = hx^3 - 4x^2 + 5x$. Cari nilai h jika $g''(1) = 4$.

6. Diberi $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 9$, cari

(a) nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = 0$,

(b) $f''(x)$,

(c) nilai x dengan keadaan $f''(x) = 0$,

(d) julat nilai x untuk $f''(x) < 0$.

Kuiz

bit.ly/2P9X98B



2.4 Aplikasi Pembezaan

Selain aspek keselamatan, *roller coaster* juga dibina dengan mempertimbangkan kepuasan maksimum pengguna. Setiap titik pada trek *roller coaster* perlu diberi perhatian untuk mencapai matlamat itu.

Apakah teknik yang boleh digunakan untuk menentukan kecerunan bagi setiap titik pada trek *roller coaster* itu?



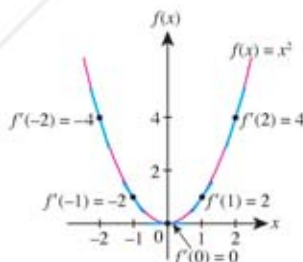
Kecerunan tangen kepada satu lengkung pada titik-titik yang berlainan

Anda telah mempelajari bahawa kecerunan lengkung pada suatu titik ialah kecerunan tangen pada titik tersebut. Kecerdunan tangen berbeza bagi setiap titik yang berlainan pada suatu lengkung.

Pertimbangkan fungsi $y = f(x) = x^2$ dengan fungsi kecerunannya, $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$. Fungsi kecerunan $f'(x)$ digunakan untuk menentukan kecerunan tangen mana-mana garis tangen kepada graf fungsi $f(x)$ di titik tertentu.

Misalnya, bagi fungsi $f(x) = x^2$:

- Apabila $x = -2$, kecerunan tangen, $f'(-2) = 2(-2) = -4$
- Apabila $x = -1$, kecerunan tangen, $f'(-1) = 2(-1) = -2$
- Apabila $x = 0$, kecerunan tangen, $f'(0) = 2(0) = 0$
- Apabila $x = 1$, kecerunan tangen, $f'(1) = 2(1) = 2$
- Apabila $x = 2$, kecerunan tangen, $f'(2) = 2(2) = 4$



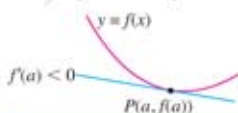
Rajah di sebelah menunjukkan kecerunan tangen kepada lengkung $f(x) = x^2$ pada lima titik yang berlainan.

Secara amnya, jenis kecerunan tangen, $f'(a)$ dan sifatnya kepada suatu lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$ dapat diringkaskan seperti yang berikut.

Kecerunan tangen pada titik di $x = a, f'(a)$

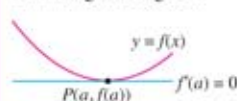
Kecerunan negatif apabila $f'(a) < 0$

Garis tangen condong ke kiri.



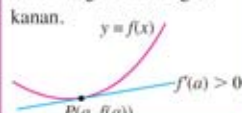
Kecerunan sifar apabila $f'(a) = 0$

Garis tangen mengufuk.

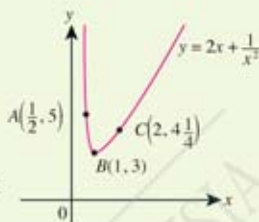


Kecerunan positif apabila $f'(a) > 0$

Garis tangen condong ke kanan.



Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ dan titik-titik $A(\frac{1}{2}, 5)$, $B(1, 3)$ dan $C(2, 4\frac{1}{4})$ yang terletak pada lengkung itu.



(a) Cari

(i) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,

(ii) kecerunan tangen bagi lengkung pada titik A , B dan C .

(b) Untuk setiap titik A , B dan C , nyatakan keadaan kecerunan tangennya pada lengkung itu.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) (i)} \quad y &= 2x + \frac{1}{x^2} \\ &= 2x + x^{-2} \\ \frac{dy}{dx} &= 2 + (-2x^{-2-1}) \\ &= 2 - 2x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= 2 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) Kecerunan tangen di } A(\frac{1}{2}, 5) &= 2 - \frac{2}{(\frac{1}{2})^3} \\ &= -14 \\ \text{Kecerunan tangen di } B(1, 3) &= 2 - \frac{2}{1^3} \\ &= 0 \\ \text{Kecerunan tangen di } C(2, 4\frac{1}{4}) &= 2 - \frac{2}{2^3} \\ &= 1\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(b) Pada titik A , kecerunan tangennya ialah -14 (< 0). Jadi, kecerunannya adalah negatif dengan garis tangen condong ke kiri.

Pada titik B , kecerunan tangennya ialah 0 . Jadi, kecerunannya adalah sifar dengan garis tangen adalah mengufuk.

Pada titik C , kecerunan tangennya ialah $1\frac{3}{4}$ (> 0). Jadi, kecerunannya adalah positif dengan garis tangen condong ke kanan.

Latihan Kendiri 2.7

1. Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 9x + \frac{1}{x}$ untuk $x > 0$.

(a) (i) Cari kecerunan tangen kepada lengkung itu di $x = \frac{1}{4}$ dan $x = 1$.

(ii) Untuk setiap koordinat- x itu, nyatakan keadaan kecerunan tangennya kepada lengkung itu.

(b) Seterusnya, cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan garis tangennya adalah mengufuk.

2. Lengkung $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ mempunyai kecerunan -14 dan 7 masing-masing di $x = \frac{1}{2}$ dan $x = 2$.

(a) Tentukan nilai a dan nilai b .

(b) Cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan kecerunan tangennya ialah sifar.

Persamaan tangen dan normal kepada satu lengkung pada suatu titik

Pertimbangkan titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $R(x, y)$ yang terletak pada garis lurus l dengan kecerunan m seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Didapati bahawa kecerunan $PR = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$.

Jadi, rumus bagi persamaan garis lurus l dengan kecerunan m dan melalui titik $P(x_1, y_1)$ boleh ditulis sebagai:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Rumus ini boleh digunakan untuk mencari persamaan tangen dan persamaan normal kepada satu lengkung pada suatu titik tertentu.

Dalam rajah di sebelah, garis l_1 merupakan **tangen** kepada lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$. Kecerunan tangen bagi l_1 ialah nilai bagi $\frac{dy}{dx}$ di $x = a$, iaitu $f'(a)$.

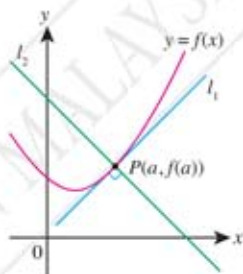
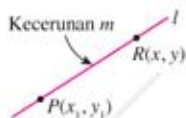
Maka, persamaan bagi tangen ialah:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Garis l_2 pula berserenjang dengan tangen l_1 dan disebut sebagai **normal** kepada lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$. Jika kecerunan tangen, $f'(a)$ wujud dan bukan sifar, kecerunan bagi normal berdasarkan hubungan $m_1 m_2 = -1$ ialah $-\frac{1}{f'(a)}$.

Maka, persamaan bagi normal ialah:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$



Contoh 14

Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ pada titik $P(2, 5)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, jadi $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Apabila $x = 2$, $f'(2) = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

Kecerunan tangen pada titik $P(2, 5)$ ialah 4.

Persamaan tangen ialah $y - 5 = 4(x - 2)$

$$y - 5 = 4x - 8$$

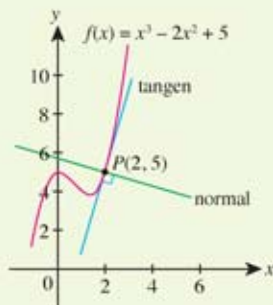
$$y = 4x - 3$$

Kecerunan normal pada titik $P(2, 5)$ ialah $-\frac{1}{4}$.

Persamaan normal ialah $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 2)$

$$4y - 20 = -x + 2$$

$$4y + x = 22$$



Latihan Kendiri 2.8

- Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada titik yang diberi berikut.
 - $f(x) = 5x^2 - 7x - 1$ pada titik $(1, -3)$
 - $f(x) = x^3 - 5x + 6$ pada titik $(2, 4)$
 - $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ pada titik $(4, 3)$
 - $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ pada titik $(3, 2)$
- Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada nilai x yang diberi berikut.
 - $y = 2x^3 - 4x + 3, x = 1$
 - $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 4$
 - $y = \sqrt{x+1}, x = 3$
 - $y = \frac{5}{x^2+1}, x = -2$
 - $y = 2 + \frac{1}{x}, x = -1$
 - $y = \frac{x^2+3}{x+1}, x = 3$
- Satu tangen dan normal dilukis pada lengkung $y = x\sqrt{1-2x}$ di $x = -4$. Cari
 - nilai $\frac{dy}{dx}$ di $x = -4$,
 - persamaan tangen,
 - persamaan normal.
- Tangen kepada lengkung $y = (x-2)^2$ pada titik $(3, 1)$ melalui titik $(k, 7)$. Cari nilai k .
 - Normal kepada lengkung $y = 7x - \frac{6}{x}$ di $x = 1$ menyilang paksi- x di titik A . Cari koordinat A .



Menyelesaikan masalah yang melibatkan tangen dan normal

Rajah 2.1(a) menunjukkan sebuah loyang berbentuk bulatan dengan satu daripada sukuannya, iaitu AOB telah dipotong. Sebiji bola diputarakan di dalam loyang itu dan bola berpusing mengikut lilitan loyang yang berbentuk bulatan.



Rajah 2.1(a)



Rajah 2.1(b)



Rajah 2.1(c)

Apakah yang akan berlaku kepada gerakan bola itu apabila sukuan loyang AOB yang dipotong dikeluarkan daripada loyang seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.1(b)? Adakah gerakan bola itu akan mengikut garis tangen kepada lilitan loyang di titik A ?

Contoh

15

APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan sebatang jalan raya yang boleh diwakili oleh lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$. Kumar memandu keretanya di jalan raya itu. Oleh kerana hujan, jalan tersebut menjadi licin dan menyebabkan Kumar tersesar di titik A lalu mengikut laluan AB yang merupakan garis tangen $y = 2x - c$ kepada jalan raya itu. Cari

- koordinat A ,
- nilai pemalar c .

