

Penyelesaian

BAB

2

1. Memahami masalah

- ◆ Sebatang jalan raya diwakili oleh lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- ◆ Kumar memandu keretanya di jalan raya itu dan tersasar di titik A lalu mengikut laluan $y = 2x - c$, iaitu laluan tangen kepada jalan raya.
- ◆ Cari koordinat A dan nilai pemalar c .

2. Merancang strategi

- ◆ Cari fungsi kecerunan, $\frac{dy}{dx}$ bagi lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- ◆ Kecerunan bagi $y = 2x - c$ ialah 2.
- ◆ Selesaikan $\frac{dy}{dx} = 2$ untuk memperoleh koordinat A.
- ◆ Gantikan koordinat A yang diperoleh ke dalam fungsi $y = 2x - c$ untuk mencari nilai pemalar c .

3. Melaksanakan strategi

$$(a) \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 2$$

Oleh sebab $y = 2x - c$ ialah tangen kepada jalan raya

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ di titik A, jadi

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

Oleh sebab titik A terletak di atas lengkung, jadi

$$y = \frac{1}{2}(4)^2 - 2(4) + 2$$

$$y = 2$$

Maka, koordinat A ialah (4, 2).

- (b) Titik A(4, 2) terletak di atas laluan AB, iaitu $y = 2x - c$, jadi

$$2 = 2(4) - c$$

$$c = 6$$

Maka, nilai bagi pemalar c ialah 6.

4. Membuat refleksi

- (a) Gantikan $x = 4$ bagi A(4, 2) ke dalam $y = 2x - 6$, kita peroleh

$$y = 2(4) - 6$$

$$y = 8 - 6$$

$$y = 2$$

- (b) Laluan AB, iaitu $y = 2x - c$ dengan kecerunan 2 melalui titik A(4, 2) dan (0, -c), maka

kecerunan AB = 2

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$$

$$\frac{2 - (-c)}{4 - 0} = 2$$

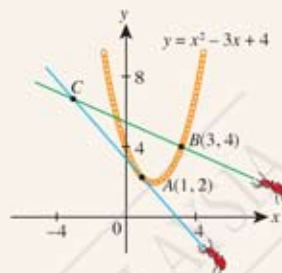
$$\frac{2 + c}{4} = 2$$

$$c + 2 = 8$$

$$c = 8 - 2$$

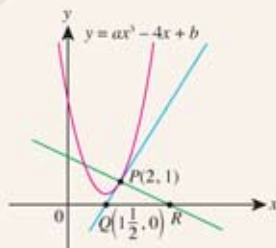
$$c = 6$$

- Rajah di sebelah menunjukkan seutas gelang tangan yang boleh diwakili oleh lengkung $y = x^2 - 3x + 4$ dengan keadaan titik $A(1, 2)$ dan titik $B(3, 4)$ terletak di atas gelang itu. Garis AC ialah tangen kepada gelang pada titik A dan garis BC pula ialah normal kepada gelang pada titik B . Dua ekor semut berjalan masing-masing di sepanjang garis tangen AC dan garis normal BC , dan bertemu pada titik C . Cari
 - persamaan tangen pada titik A ,
 - persamaan normal pada titik B ,
 - koordinat C , iaitu titik pertemuan kedua-dua ekor semut itu.

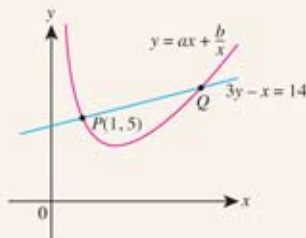


- Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 2x^2 - 5x - 2$.
 - Cari persamaan normal kepada lengkung itu pada titik $A(1, -5)$.
 - Normal itu bertemu lengkung sekali lagi pada titik B . Cari koordinat B .
 - Seterusnya, cari koordinat titik tengah AB .

- Dalam rajah di sebelah, tangen kepada lengkung $y = ax^3 - 4x + b$ di $P(2, 1)$ menyalang paksi- x di $Q(1\frac{1}{2}, 0)$. Normal di P pula menyalang paksi- x di R . Cari
 - nilai a dan nilai b ,
 - persamaan normal di titik P ,
 - koordinat R ,
 - luas segi tiga PQR .



- Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = ax + \frac{b}{x}$. Garis $3y - x = 14$ adalah normal kepada lengkung di titik $P(1, 5)$ dan normal ini bertemu lengkung sekali lagi di titik Q . Cari
 - nilai a dan nilai b ,
 - persamaan tangen di titik P ,
 - koordinat Q ,
 - koordinat titik tengah PQ .



- Tangen kepada lengkung $y = \sqrt{2x+1}$ di titik $A(4, 3)$ memotong paksi- x di titik B . Cari jarak AB .
 - Tangen kepada lengkung $y = hx^3 + kx + 2$ di $(1, \frac{1}{2})$ adalah selari dengan normal kepada lengkung $y = x^2 + 6x + 4$ di $(-2, -4)$. Cari nilai pemalar h dan nilai pemalar k .



Titik pusingan dan sifat titik pusingan tersebut

Terdapat tiga jenis titik pegun, iaitu titik maksimum, titik minimum dan titik lengkok balas. Antara titik pegun itu, yang manakah ialah titik pusingan dan bukan titik pusingan? Mari teroka cara untuk menentukan titik pegun dan sifat-sifatnya.

BAB

2

Aktiviti Penerokaan 7

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Menentukan titik pegun pada graf suatu fungsi dan menghuraikan sifat titik pegun itu dengan memerhatikan kecerunan titik-titik kejirannya



ggblm.at/tggjh78b

Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $y = -x^2 + 2x + 3$ dan tangen kepada lengkung itu pada titik P yang terpapar pada satah.
3. Seret titik P di sepanjang lengkung itu dan perhatikan kecerunan lengkung pada titik P .
4. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Koordinat- x bagi titik P	-1	0	1	2	3
Kecerunan lengkung pada titik P , $\frac{dy}{dx}$	4				
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	+				
Lakaran tangen					
Lakaran graf					

5. Gantikan nilai a , b dan c pada petak fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk memperoleh graf bagi lengkung $y = x^2 + 2x - 3$ pula. Ulang langkah 3 dan 4 dengan menggantikan koordinat- x bagi titik P dalam jadual tersebut dengan $x = -3, -2, -1, 0$ dan 1 .
6. Klik pada petak $f(x) = ax^2 + bx + c$ sekali lagi dan tukarkan x^2 kepada x^3 . Kemudian, gantikan nilai a , b dan c bagi fungsi itu untuk memperoleh graf bagi lengkung $y = x^3 + 4$. Ulang langkah 3 dan 4 dengan menggantikan koordinat- x bagi titik P dalam jadual tersebut dengan $x = -2, -1, 0, 1$ dan 2 .
7. Untuk setiap fungsi yang telah diteroka berikut:
 - (a) $y = -x^2 + 2x + 3$ (b) $y = x^2 + 2x - 3$ (c) $y = x^3 + 4$
 - (i) Nyatakan koordinat bagi titik pegun.
 - (ii) Apabila x menokok melalui titik pegun itu, bagaimanakah nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah?
 - (iii) Apakah yang dapat anda perhatikan pada tanda bagi kecerunan lengkung itu?
 - (iv) Tentukan jenis dan sifat titik pegun itu.
8. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab bersama dengan rakan yang lain.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 7, didapati bahawa suatu titik pegun boleh ditentukan apabila $\frac{dy}{dx} = 0$ dan sifat titik pegun itu dapat diringkaskan seperti berikut:

Bagi suatu lengkung $y = f(x)$ dengan titik pegun S di $x = a$,

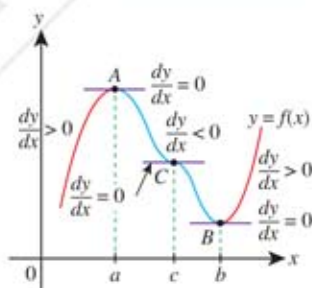
- Jika $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif apabila x menokok melalui a , titik S ialah titik maksimum.
- Jika $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif apabila x menokok melalui a , titik S ialah titik minimum.
- Jika $\frac{dy}{dx}$ tidak berubah tanda apabila x menokok melalui a , titik S ialah **titik lengkok balas**.

Titik pegun disebut sebagai **titik pusingan** jika titik itu ialah titik maksimum atau minimum.



Pertimbangkan graf bagi fungsi $y = f(x)$ seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Berdasarkan rajah, graf fungsi menaik yang berwarna merah mempunyai kecerunan positif, iaitu $\frac{dy}{dx} > 0$ manakala graf fungsi menurun yang berwarna biru mempunyai kecerunan negatif, iaitu $\frac{dy}{dx} < 0$.

Titik dengan keadaan $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$ disebut sebagai **titik pegun** dengan tangen kepada graf pada titik pegun adalah mengufuk. Oleh itu, titik A , B dan C ialah titik pegun bagi $y = f(x)$.



Daripada graf $y = f(x)$ di sebelah, didapati bahawa:

Titik pegun A ialah titik maksimum

Apabila x menokok melalui $x = a$, nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif.

Titik pegun B ialah titik minimum

Apabila x menokok melalui $x = b$, nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif.

Titik maksimum A dan titik minimum B ini disebut sebagai **titik pusingan**. Di titik pegun C pula, nilai $\frac{dy}{dx}$ tidak berubah tanda apabila x menokok melalui $x = c$. Titik pegun C bukan titik pusingan. Titik pegun yang bukan titik maksimum atau titik minimum ini disebut sebagai **titik lengkok balas**, iaitu titik pada saat berlakunya perubahan kecekungan suatu graf.

Contoh 16

Diberi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

- (a) Cari koordinat titik pusingan bagi lengkung itu.
 (b) Tentukan sama ada setiap titik pusingan itu ialah titik maksimum atau minimum.

Penyelesaian

(a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x+1)(x-3)$$

Untuk titik pusingan, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = 3$$

Apabila $x = -1$, $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 11$

$$y = 16$$

Apabila $x = 3$, $y = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 11$

$$y = -16$$

Maka, titik pusingan ialah $(-1, 16)$ dan $(3, -16)$.

(b)

x	-1.5	-1	-0.5	2.5	3	3.5
$\frac{dy}{dx}$	6.75	0	-5.25	-5.25	0	6.75
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	+	0	-	-	0	+
Lakaran tangen						
Lakaran graf						

Daripada jadual, tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada positif

kepada negatif apabila x menokok melalui $x = -1$ dan

tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada positif

apabila x menokok melalui $x = 3$. Maka, titik pusingan

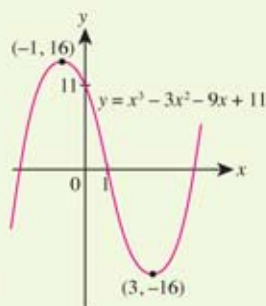
$(-1, 16)$ ialah titik maksimum dan titik pusingan $(3, -16)$ ialah titik minimum.

Lakaran graf bagi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ dengan titik pusingan maksimum $(-1, 16)$ dan titik pusingan minimum $(3, -16)$ dapat ditunjukkan seperti dalam rajah di sebelah.

Sudut Informasi



Apabila lengkung $y = f(x)$ berpusing dan bertukar arah pada titik A dan titik B, titik maksimum A dan titik minimum B disebut sebagai titik pusingan.



Selain kaedah **lakaran tangen** bagi suatu fungsi $y = f(x)$,

pembezaan peringkat kedua, $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika wujud, boleh

digunakan untuk menentukan sama ada suatu titik pusingan ialah titik maksimum atau minimum.

Rajah 2.2 menunjukkan graf bagi lengkung $y = 3x - x^3$ dengan titik pusingan $P(1, 2)$ dan graf bagi fungsi kecerunannya, $\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$.

Daripada graf $\frac{dy}{dx}$ melawan x , perhatikan bahawa:

$\frac{dy}{dx}$ menurun apabila x menokok melalui $x = 1$

$\Leftrightarrow$ Kadar perubahan $\frac{dy}{dx}$ ialah negatif di $x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$ di $x = 1$

Jadi, titik pusingan $P(1, 2)$ dengan $\frac{dy}{dx} = 0$ dan

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$ ialah titik maksimum.

Secara amnya,

Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik maksimum apabila $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

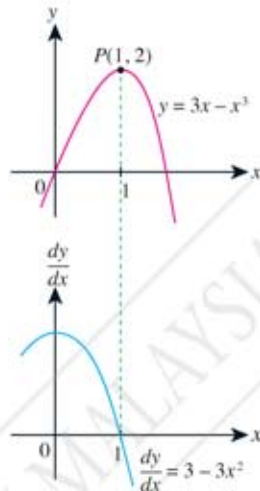
Rajah 2.3 pula menunjukkan graf bagi lengkung $y = x + \frac{4}{x} - 2$ dengan titik pusingan $P(2, 2)$ dan graf bagi fungsi kecerunannya, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{4}{x^2}$.

Daripada graf $\frac{dy}{dx}$ melawan x , perhatikan bahawa:

$\frac{dy}{dx}$ meningkat apabila x menokok melalui $x = 2$

$\Leftrightarrow$ Kadar perubahan $\frac{dy}{dx}$ ialah positif di $x = 2$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$ di $x = 2$

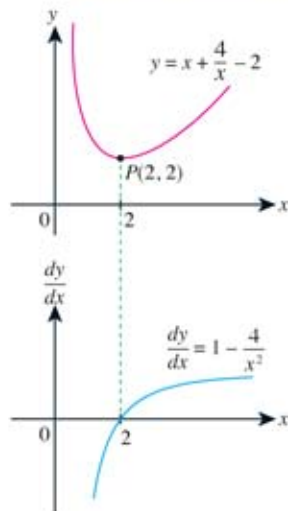


Rajah 2.2



Sudut Informasi

- Kaedah lakaran tangen digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pegun.
- Kaedah terbitan kedua pula digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pusingan.



Rajah 2.3

Jadi, titik pusingan $P(2, 2)$ dengan $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$ ialah titik minimum.

Secara amnya,

Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik minimum apabila

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

BAB

2

Contoh 17

Cari titik-titik pegun bagi setiap lengkung berikut dan tentukan sifat setiap titik pegun itu.

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

(b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

Penyelesaian

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x^2 + x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(x + 2)(x - 1)$$

Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$6(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

Apabila $x = -2$, $y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 5$
 $y = 25$

Apabila $x = 1$, $y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 5$
 $y = -2$

Maka, titik pegun ialah $(-2, 25)$ dan $(1, -2)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$$

Apabila $x = -2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-2) + 6 = -18 < 0$

Apabila $x = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(1) + 6 = 18 > 0$

Maka, $(-2, 25)$ ialah titik maksimum dan $(1, -2)$ ialah titik minimum.

(b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

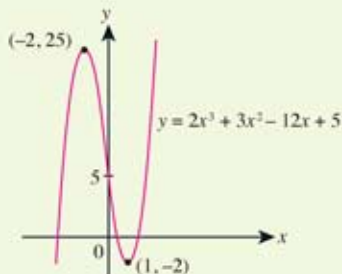
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^2(x - 3)$$

Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$4x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 3$$



Apabila $x = 0$, $y = 0^4 - 4(0)^3 + 1 = 1$
 Apabila $x = 3$, $y = 3^4 - 4(3)^3 + 1 = -26$
 Maka, titik pegun ialah $(0, 1)$ dan $(3, -26)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$$

Apabila $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)^2 - 24(0) = 0$

x	-0.1	0	0.1
$\frac{dy}{dx}$	-0.124	0	-0.116
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	-	0	-
Lakaran tangen			
Lakaran graf			

Daripada jadual, didapati bahawa $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada sifar dan kemudian kepada negatif sekali lagi, iaitu tiada perubahan tanda apabila x menokok melalui 0.

Maka, $(0, 1)$ ialah titik lengkok balas.

Apabila $x = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3)^2 - 24(3) = 36 > 0$

Maka, $(3, -26)$ ialah titik minimum.



Apabila $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, kaedah lakaran tangen digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pegun.



Dalam rajah di atas, titik A bukan titik maksimum atau titik minimum bagi fungsi $y = x^3 + 3$, tetapi disebut sebagai titik lengkok balas. Bolehkah anda berikan tiga contoh fungsi lain yang mempunyai titik lengkok balas?

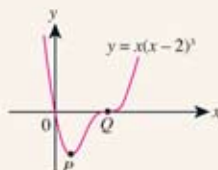
Latihan Kendiri 2.10

1. Cari koordinat titik pusingan bagi setiap lengkung berikut. Dalam setiap kes, tentukan sama ada titik pusingan itu ialah titik maksimum atau titik minimum.

(a) $y = x^3 - 12x$ (b) $y = x(x - 6)^2$ (c) $y = x\sqrt{18 - x^2}$ (d) $y = (x - 6)(4 - 2x)$
 (e) $y = x + \frac{4}{x}$ (f) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (g) $y = x + \frac{1}{x - 1}$ (h) $y = \frac{(x - 3)^2}{x}$

2. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = x(x - 2)^3$.

- (a) Cari ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$.
 (b) Cari koordinat titik bagi dua titik pegun P dan Q.
 (c) Seterusnya, tentukan sifat bagi titik pegun Q menggunakan kaedah lakaran tangen.





Menyelesaikan masalah yang melibatkan nilai maksimum dan nilai minimum serta mentafsir penyelesaian tersebut

Kebanyakan tin makanan dan minuman yang terdapat di pasar raya berbentuk silinder. Bagaimanakah pengeluar tin makanan dan minuman boleh menentukan ukuran tin tersebut supaya kos pengeluarannya dapat diminimumkan?

Adakah teknik pembezaan peringkat pertama dan kedua boleh membantu pengeluar tin menyelesaikan masalah itu?

Contoh

18

APLIKASI MATEMATIK

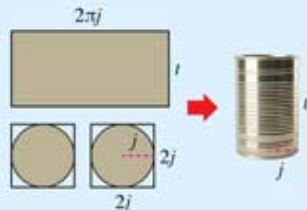
Sebuah kilang ingin menghasilkan tin makanan berbentuk silinder yang diperbuat daripada beberapa kepingan aluminium dengan isi padu 512 cm^3 . Permukaan melengkung tin dibentuk dengan menggulung sekeping aluminium berbentuk segi empat tepat manakala bahagian atas dan bawah tin dibentuk dengan memotong keluar dua buah bulatan daripada dua keping aluminium berbentuk segi empat sama. Cari jejari tapak tin itu, dalam cm, supaya jumlah luas permukaan semua kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Katakan j cm ialah jejari tapak dan t cm adalah tinggi tin.
- Isi padu tin, $I = \pi j^2 t = 512 \text{ cm}^3$
- Jumlah luas permukaan kepingan aluminium yang digunakan,
 $L = 2(2j)^2 + 2\pi jt$
 $L = 2(4j^2) + 2\pi jt$
 $L = 8j^2 + 2\pi jt$
- Cari nilai j dengan keadaan L adalah minimum.



2. Merancang strategi

- Ungkapkan L dalam sebutan satu pemboleh ubah tunggal, iaitu dengan mengungkapkan t dalam sebutan j .
- Cari nilai j apabila $\frac{dL}{dj} = 0$.
- Menggunakan nilai j yang diperoleh, tentukan sama ada L adalah maksimum atau minimum.

3. Melaksanakan strategi

Isi padu tin, $I = 512$

$$\pi j^2 t = 512$$

$$t = \frac{512}{\pi j^2} \dots \textcircled{1}$$

Jumlah luas permukaan, L cm², kepingan-kepingan aluminium yang digunakan diberi oleh

$$L = 8j^2 + 2\pi jt \dots \textcircled{2}$$

Gantikan $\textcircled{1}$ ke dalam $\textcircled{2}$.

$$L = 8j^2 + 2\pi j \left(\frac{512}{\pi j^2} \right)$$

$$L = 8j^2 + \frac{1\,024}{j}$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - \frac{1\,024}{j^2}$$

Untuk nilai minimum, $\frac{dL}{dj} = 0$

$$16j - \frac{1\,024}{j^2} = 0$$

$$16j^3 - 1\,024 = 0$$

$$j^3 = \frac{1\,024}{16}$$

$$j^3 = 64$$

$$j = \sqrt[3]{64}$$

$$j = 4$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - \frac{1\,024}{j^2}$$

$$\frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\,048}{j^3}$$

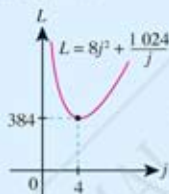
$$\text{Apabila } j = 4, \frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\,048}{4^3} = 48 > 0$$

Maka, L mempunyai nilai minimum apabila jejari tapak ialah 4 cm.

4. Membuat refleksi dan tafsiran

Lakaran graf bagi $L = 8j^2 + \frac{1\,024}{j}$

menunjukkan bahawa nilai L adalah minimum di $j = 4$.



Jadi, kilang itu perlu menghasilkan tin makanan dengan jejari tapak ialah

$$4 \text{ cm dan tinggi, } t = \frac{512}{\pi j^2} = \frac{512}{\pi(4)^2}$$

$= 10.186 \text{ cm}$ supaya jumlah luas permukaan kepingan-kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.

Kuiz Pantas

Daripada dua persamaan yang terbentuk dalam Contoh 18,

$$\pi j^2 t = 512 \dots \textcircled{1}$$

$$L = 8j^2 + 2\pi jt \dots \textcircled{2}$$

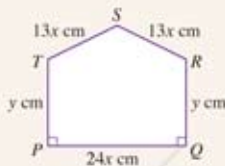
Bagi persamaan $\textcircled{1}$,

bolehkah kita mengungkapkan j dalam sebutan t dan menggantikannya ke dalam persamaan $\textcircled{2}$ untuk menyelesaikan masalah dalam Contoh 18 ini? Bincangkan.

Latihan Kendiri 2.11

- Seutas wayar dengan panjang 80 cm dibengkokkan untuk membentuk sebuah sektor POQ bagi sebuah bulatan berpusat O . Diberi bahawa $OQ = j$ cm dan $\angle POQ = \theta$ radian.
 - Tunjukkan bahawa luas, A cm², bagi sektor POQ itu diberi oleh $A = \frac{1}{2}j(80 - 2j)$.
 - Seterusnya, cari luas maksimum bagi sektor POQ itu.

2. Seutas dawai dengan panjang 240 cm dibengkokkan kepada suatu bentuk seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.
 - (a) Ungkapkan y dalam sebutan x .
 - (b) Tunjukkan bahawa luas, $L \text{ cm}^2$, yang dilitupi oleh dawai itu diberi oleh $L = 2\,880x - 540x^2$.
 - (c) Cari
 - (i) nilai x dan nilai y supaya L adalah maksimum,
 - (ii) luas maksimum, dalam cm^2 , rantau itu.



BAB

2



3. Sebuah kilang menghasilkan tin minuman berbentuk silinder tegak tertutup dengan isi padu $32\pi \text{ cm}^3$. Kos bahan yang digunakan untuk bulatan atas dan bawah tin itu ialah 2 sen per cm^2 manakala sisi melengkung tin ialah 1 sen per cm^2 .
 - (a) Tunjukkan bahawa fungsi kos, C membuat tin minuman itu diberi oleh $C = 4\pi j^2 + \frac{64\pi}{j}$, dengan j ialah jejari tapak kon.
 - (b) Cari ukuran tin supaya kos yang digunakan oleh kilang itu adalah minimum.



Mentafsir dan menentukan kadar perubahan bagi kuantiti yang terhubung

Aktiviti Penerokaan

8

Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka kadar perubahan kedalaman air daripada graf kedalaman-masa

Langkah:

1. Pertimbangkan dua buah bekas berbentuk silinder dan kon yang diisi dengan air pada kadar malar $3\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ daripada sebuah pili air. Setiap bekas itu mempunyai tinggi 9 cm dan isi padu $48\pi \text{ cm}^3$.
2. Tentukan masa, t , dalam saat, yang diperlukan untuk memenuhi air di dalam setiap bekas itu.
3. Berdasarkan luas permukaan air di dalam setiap bekas, lakarkan graf kedalaman-masa untuk menunjukkan hubungan antara kedalaman aras air, h cm, dengan masa yang diambil, t saat, untuk memenuhi air di dalam kedua-dua bekas itu.
4. Perhatikan bentuk graf yang diperoleh. Kemudian, jawab soalan yang berikut.
 - (a) Berdasarkan kecerunan setiap graf, tentukan kadar perubahan kedalaman air pada masa tertentu di dalam setiap bekas itu.
 - (b) Adakah kedalaman air di dalam bekas berbentuk silinder meningkat pada kadar malar apabila bekas diisi dengan air? Bagaimanakah pula dengan kedalaman air di dalam bekas berbentuk kon? Adakah kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas berbentuk kon berubah apabila air diisikan?
5. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Daripada Aktiviti Penerokaan 8, didapati bahawa kadar perubahan kedalaman air, $\frac{dh}{dt}$ pada masa tertentu, t ialah kecerunan lengkung pada t dengan andaian air mengalir ke dalam bekas pada kadar yang malar. Kadar perubahan ini boleh diperoleh dengan melukis suatu tangen kepada lengkung itu pada t atau menggunakan pembezaan untuk mencari kecerunan tangen pada t . Konsep **petua rantau** juga boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah seperti ini dengan mudah.

Misalnya, jika dua pemboleh ubah y dan x berubah dengan masa, t dan dihubungkan oleh persamaan $y = f(x)$, maka kadar perubahan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ boleh dihubungkan oleh:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \text{ (Petua rantai)}$$

Pertimbangkan lengkung $y = x^2 + 1$. Jika x menokok dengan kadar tetap 2 unit per saat, iaitu $\frac{dx}{dt} = 2$, maka kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \quad \leftarrow \text{Petua rantai} \\ &= 2x \times 2 \\ &= 4x \end{aligned}$$

Apabila $x = 2$, $\frac{dy}{dt} = 4(2) = 8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 8 unit per saat dan y dikatakan menokok pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = 2$.

Apabila $x = -2$, $\frac{dy}{dt} = 4(-2) = -8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -8 unit per saat dan y dikatakan menyusut pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = -2$.

Contoh 19

Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = x^2 + \frac{4}{x}$. Cari

- ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,
- kadar perubahan y apabila $x = 1$ dan $x = 2$, diberi bahawa x menokok dengan kadar tetap 3 unit per saat.

Penyelesaian

(a) $y = x^2 + \frac{4}{x}$
 $= x^2 + 4x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{4}{x^2}$$

(b) Apabila $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{4}{1^2}$
 $= -2$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -6 unit per saat.

Maka, y dikatakan menyusut pada kadar 6 unit per saat.

Tip Pintar

- $\frac{dy}{dx}$ ialah kadar perubahan y terhadap x .
- $\frac{dy}{dt}$ ialah kadar perubahan y terhadap t .
- $\frac{dx}{dt}$ pula ialah kadar perubahan x terhadap t .

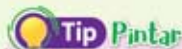
$$\begin{aligned}\text{Apabila } x = 2, \frac{dy}{dx} &= 2(2) - \frac{4}{2^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9\end{aligned}$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 9 unit per saat.

Maka, y dikatakan menokok pada kadar 9 unit per saat.



Jika kadar perubahan y terhadap masa adalah negatif, misalnya $\frac{dy}{dt} = -6$, maka y dikatakan menyusut pada kadar 6 unit s^{-1} , iaitu kadar susutannya ialah 6 unit s^{-1} .

BAB

2

Latihan Kendiri 2.12

1. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan x ialah 2 unit s^{-1} , cari kadar perubahan y pada ketika yang diberi.

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } y = 3x^2 - 4, x = \frac{1}{2} & \text{(b) } y = 2x^2 + \frac{1}{x}, x = 1 & \text{(c) } y = \frac{2}{(3x-5)^3}, x = 2 \\ \text{(d) } y = (4x-3)^5, x = \frac{1}{2} & \text{(e) } y = \frac{x}{x+1}, y = 2 & \text{(f) } y = x^3 + 2, y = 10 \end{array}$$

2. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan y ialah 6 unit s^{-1} , cari kadar perubahan x pada ketika yang diberi.

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } y = x^3 - 2x^2, x = 1 & \text{(b) } y = x^2 + \frac{4}{x}, x = 2 & \text{(c) } y = \frac{2x^2}{x-1}, x = 3 \\ \text{(d) } y = (x-6)\sqrt{x-1}, x = 2 & \text{(e) } y = \frac{2x-1}{x+1}, y = 3 & \text{(f) } y = \sqrt{2x+7}, y = 3 \end{array}$$

3. Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = (x-8)\sqrt{x+4}$. Cari

- ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$.
- kadar perubahan y pada ketika $x = 5$, jika x menokok dengan kadar 6 unit per saat.



Menyelesaikan masalah yang melibatkan kadar perubahan bagi kuantiti yang terhubung dan mentafsir penyelesaian tersebut

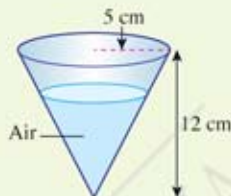
Hubungan antara jisim, M , dalam kg, dengan jejari, j , dalam cm, sebiji tembikai yang berbentuk sfera

diwakili oleh persamaan $M = \frac{2}{625}j^3$. Andaikan jejari tembikai bertambah pada kadar tetap 0.1 cm per hari dan jejarnya ialah 10 cm pada hari tertentu.

Dengan menggunakan petua rantai yang menghubungkan kadar perubahan kuantiti jisim, $\frac{dM}{dt}$ dan jejari tembikai, $\frac{dj}{dt}$, bolehkah anda tentukan kadar perubahan jisim tembikai pada hari tersebut?



Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bekas berisi air yang berbentuk kon dengan jejari 5 cm dan tinggi 12 cm. Didapati bahawa air tersebut mengalir keluar melalui lubang kecil di hujung bekas dengan kadar tetap $4 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Cari kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu apabila kedalaman air ialah 3 cm, betul kepada empat angka bererti.



Penyelesaian

Katakan r cm, h cm dan $V \text{ cm}^3$ masing-masing ialah jejari, tinggi dan isi padu air di dalam bekas itu pada masa t saat.

$$\text{Jadi, } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \dots \textcircled{1}$$

Didapati bahawa $\triangle DFE$ dan $\triangle BGE$ adalah serupa.

$$\text{Jadi, } \frac{r}{5} = \frac{h}{12}$$

$$r = \frac{5h}{12} \dots \textcircled{2}$$

Gantikan $\textcircled{2}$ ke dalam $\textcircled{1}$:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{5h}{12} \right)^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{25h^2}{144} \right) h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{25h^3}{144} \right)$$

$$V = \frac{25\pi}{432} h^3$$

Kadar perubahan V diberi oleh petua rantai berikut.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{d}{dh} \left(\frac{25\pi}{432} h^3 \right) \times \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{144} h^2 \times \frac{dh}{dt}$$

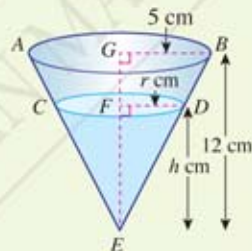
Apabila $h = 3$ dan $\frac{dV}{dt} = -4$, kita peroleh

$$-4 = \frac{25\pi}{144} (3)^2 \times \frac{dh}{dt} \leftarrow V \text{ menyusut, maka } \frac{dV}{dt} \text{ adalah negatif}$$

$$-4 = \frac{25\pi}{16} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{64}{25\pi} \\ &= -0.8148 \end{aligned}$$

Maka, kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu ialah $-0.8148 \text{ cm s}^{-1}$ dan kedalaman air dikatakan menyusut pada kadar 0.8148 cm s^{-1} .



PERBINCANGAN

Bincangkan masalah yang berikut bersama-sama rakan anda.

Air dimasukkan ke dalam sebuah tangki yang berbentuk kon membulat dengan jejari 8 cm dan tinggi 16 cm dengan kadar malar $64\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Katakan h cm ialah kedalaman air di dalam tangki dan $V \text{ cm}^3$ ialah isi padu air di dalam tangki.

Cari kadar perubahan bagi

- kedalaman air,
- luas permukaan mengufuk aras air, apabila kedalaman air ialah 8 cm.

Jejari sebiji belon berbentuk sfera yang diisi dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat. Cari kadar perubahan isi padu belon itu apabila jejarinya ialah 4 cm, betul kepada empat angka bererti.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Jejari sebiji belon yang diisi dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat.
- ◆ Cari kadar perubahan isi padu belon apabila jejarinya ialah 4 cm.

2. Merancang strategi

- ◆ Katakan j cm dan I cm³ masing-masing ialah jejari dan isi padu belon pada masa t saat.
- ◆ Bentukkan satu persamaan yang menghubungkan isi padu, I dan jejari, j belon itu.
- ◆ Gunakan petua rantai untuk menghubungkan kadar perubahan isi padu dan jejari belon itu.

4. Membuat refleksi dan tafsiran

Apabila $\frac{dI}{dt} = 100.5$ dan $\frac{dj}{dt} = 0.5$, maka

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt} \\ 100.5 &= 4\pi j^2 \times 0.5 \\ 100.5 &= 2\pi j^2\end{aligned}$$

$$j^2 = \frac{100.5}{2\pi}$$

$$j^2 = \frac{100.5}{2(3.142)}$$

$$j^2 = 15.993$$

$$j = \sqrt{15.993}$$

$$j = \pm 4$$

Maka, $j = 4$ cm.

Jadi, apabila $j = 4$ dan $\frac{dI}{dt} = 100.5$ bermaksud pada ketika jejari belon ialah 4 cm, isi padunya menokok dengan kadar 100.5 cm³ per saat.

3. Melaksanakan strategi

Andaikan $I = f(j)$.

Kadar perubahan I diberi oleh:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt}$$

Diketahui bahawa $I = \frac{4}{3}\pi j^3$.

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dj} \left(\frac{4}{3}\pi j^3 \right) \times \frac{dj}{dt} \\ \frac{dI}{dt} &= 4\pi j^2 \times \frac{dj}{dt}\end{aligned}$$

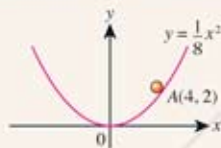
Apabila $j = 4$ dan $\frac{dj}{dt} = 0.5$, maka

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 4\pi(4)^2 \times 0.5 \\ &= 4\pi(16) \times 0.5 \\ &= 64\pi \times 0.5 \\ &= 32\pi \\ &= 32(3.142) \\ &= 100.5\end{aligned}$$

Maka, kadar perubahan isi padu belon apabila $j = 4$ cm ialah 100.5 cm³ per saat.

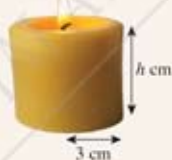
Latihan Kendiri 2.13

- Rajah di sebelah menunjukkan sebutir manik yang bergerak di sepanjang lengkung $y = \frac{1}{8}x^2$. Pada titik $A(4, 2)$, kadar perubahan x ialah 3 unit s^{-1} . Cari kadar perubahan y yang sepadan.

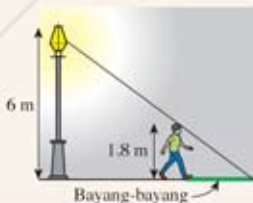


- Luas sebuah segi empat sama dengan sisi $x \text{ cm}$ bertambah dengan kadar $8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Cari kadar perubahan panjang sisinya apabila luasnya ialah 4 cm^2 .
- Seketul ais berbentuk kubus dengan sisi $x \text{ cm}$ mencair pada kadar 10.5 cm^3 per minit. Cari kadar perubahan x pada ketika $x = 10 \text{ cm}$.

- Rajah di sebelah menunjukkan sebatang lilin yang berbentuk silinder tegak dan berjari 3 cm. Tinggi lilin itu ialah $h \text{ cm}$ dan isi padunya ialah $V \text{ cm}^3$. Lilin itu terbakar dengan keadaan tingginya menyusut pada kadar 0.6 cm per minit.
 - Ungkapkan V dalam sebutan h .
 - Cari kadar perubahan isi padu lilin itu apabila tingginya ialah 8 cm .



- Chandran berjalan pada kadar 3.5 ms^{-1} daripada sebatang tiang lampu pada waktu malam seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Tinggi Chandran dan tiang lampu itu masing-masing ialah 1.8 m dan 6 m . Cari kadar perubahan
 - panjang bayang-bayang Chandran,
 - hujung bayang-bayangnya yang bergerak.

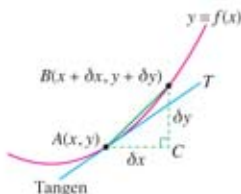


Mentafsir dan menentukan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Pertimbangkan lengkung $y = f(x)$ dalam rajah di sebelah. Dua titik berhampiran, iaitu titik $A(x, y)$ dan titik $B(x + \delta x, y + \delta y)$ terletak di atas lengkung itu dan AT ialah tangen pada titik A . Perhatikan bahawa $AC = \delta x$ dan $BC = \delta y$.

Diketahui bahawa kecerunan tangen AT ialah:

$$\text{Nilai bagi } \frac{dy}{dx} \text{ pada titik } A = \text{Nilai bagi } \text{had } \frac{\delta y}{\delta x} \text{ as } \delta x \rightarrow 0$$



dengan δy dan δx masing-masing ialah perubahan kecil dalam y dan x .

Jika δx ialah suatu nilai yang kecil, iaitu $\delta x \rightarrow 0$, maka $\frac{\delta y}{\delta x}$ adalah penghampiran terbaik bagi $\frac{dy}{dx}$.

$$\text{Jadi, } \frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Secara amnya, jika δx ialah nilai yang kecil, maka

$$\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$$

Rumus ini sangat berguna untuk mencari perubahan hampir dalam satu kuantiti akibat perubahan kecil dalam kuantiti yang satu lagi. Semakin kecil nilai δx , semakin tepat penghampirannya. Oleh itu, kita boleh tafsirkan bahawa:

Bagi suatu fungsi $y = f(x)$, dengan δy ialah perubahan kecil dalam y dan δx ialah perubahan kecil dalam x ,

- Apabila $\delta y > 0$, maka berlaku tokokan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x , iaitu δx .
- Apabila $\delta y < 0$, maka berlaku susutan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x , iaitu δx .

Seterusnya, oleh sebab $f(x + \delta x) = y + \delta y$ dan $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$, kita perolehi:

$$f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx} \delta x \text{ atau } f(x + \delta x) \approx f(x) + \frac{dy}{dx} \delta x$$

Rumus ini boleh digunakan untuk mencari nilai hampir bagi y .

Contoh 22

Diberi bahawa $y = x^3$, cari

- (a) perubahan hampir dalam y jika x menokok daripada 4 kepada 4.05,
 (b) perubahan hampir dalam x jika y menyusut daripada 8 kepada 7.97.

Penyelesaian

(a) $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Apabila $x = 4$, $\delta x = 4.05 - 4$
 $= 0.05$

dan $\frac{dy}{dx} = 3(4)^2 = 48$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$
 $= 48 \times 0.05$
 $\delta y = 2.4$

Maka, perubahan hampir dalam y , iaitu δy ialah 2.4.

$\delta y > 0$ bermaksud berlakunya tokokan kecil dalam y sebanyak 2.4.

(b) Apabila $y = 8$, $x^3 = 8$

$$x = 2$$

$$\delta y = 7.97 - 8 = -0.03$$

dan $\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 = 12$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$

$$-0.03 = 12 \times \delta x$$

$$\delta x = \frac{-0.03}{12}$$

$$\delta x = -0.0025$$

Maka, perubahan hampir dalam x , iaitu δx ialah -0.0025 .

$\delta x < 0$ bermaksud berlakunya susutan kecil dalam x sebanyak 0.0025.



PERBINCANGAN

Jika nilai δx adalah terlalu besar, adakah anda boleh menggunakan rumus

$\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$? Jelaskan.

BAB

2

Diberi bahawa $y = \sqrt{x}$, cari

(a) nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 4$

(b) nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= \sqrt{x} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Apabila } x = 4, \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2(2)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \text{Apabila } x = 4, \quad y &= \sqrt{4} \\ &= 2 \\ \delta x &= 4.02 - 4 \\ &= 0.02 \\ \text{dan} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Menggunakan $f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx} \delta x$

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \delta x} &\approx y + \frac{dy}{dx} \delta x \\ \sqrt{4 + 0.02} &\approx 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ \sqrt{4.02} &= 2.005 \end{aligned}$$

Maka, nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$ ialah 2.005.

Daripada Contoh 23, perhatikan jadual di bawah.

Peratus perubahan dalam x	Peratus perubahan dalam y
$\begin{aligned} \frac{\delta x}{x} \times 100 &= \frac{4.02 - 4}{4} \times 100 \\ &= \frac{0.02}{4} \times 100 \\ &= 0.5\% \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{\delta y}{y} \times 100 &= \frac{2.005 - 2}{2} \times 100 \\ &= \frac{0.005}{2} \times 100 \\ &= 0.25\% \end{aligned}$

Secara amnya,

Jika x berubah daripada x kepada $x + \delta x$, maka

- Peratus perubahan dalam $x = \frac{\delta x}{x} \times 100\%$
- Peratus perubahan dalam $y = \frac{\delta y}{y} \times 100\%$

Jadi, jika diberi suatu fungsi, misalnya $y = 3x^2 - 2x - 3$ dan x bertambah sebanyak 2% apabila $x = 2$, bolehkah anda tentukan peratus perubahan dalam y ? Ikuti Contoh 24 untuk menyelesaikan masalah seperti ini.

Kaedah Alternatif

Dalam Contoh 23, δy juga boleh ditentukan melalui kaedah penggantian.

$$\begin{aligned} \text{Diberi } y &= \sqrt{x} \\ \text{Apabila } x = 4, \quad y &= \sqrt{4} \\ &= 2 \\ \text{Apabila } x = 4.02, \quad y &= \sqrt{4.02} \\ &= 2.005 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \delta y &= 2.005 - 2 \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } \sqrt{4.02} &= y + \delta y \\ &= 2 + 0.005 \\ &= 2.005 \end{aligned}$$

Contoh 24

Diberi $y = 2x^2 - 3x + 4$. Apabila $x = 2$, terdapat perubahan kecil dalam x sebanyak 3%. Dengan menggunakan konsep kalkulus, cari peratus perubahan dalam y yang sepadan.

Penyelesaian

$$\text{Diberi } y = 2x^2 - 3x + 4$$

$$\text{Apabila } x = 2, y = 2(2)^2 - 3(2) + 4$$

$$= 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3$$

$$= 4(2) - 3$$

$$= 5$$

$$\text{dan } \delta x = \frac{3}{100} \times 2$$

$$= 0.06$$

$$\text{Jadi, } \delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$$

$$= 5 \times 0.06$$

$$= 0.3$$

$$\frac{\delta y}{y} \times 100 = \frac{0.3}{6} \times 100$$

$$= 5$$

Maka, peratus perubahan dalam y yang sepadan ialah 5%.

Latihan Kendiri 2.14

- Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam y yang sepadan dengan perubahan kecil dalam x yang diberi.
 - $y = 4x^3 - 3x^2$, apabila x menokok daripada 1 kepada 1.05.
 - $y = 4\sqrt{x} + 3x^2$, apabila x menyusut daripada 4 kepada 3.98.
- Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam x yang sepadan dengan perubahan kecil dalam y yang diberi.
 - $y = 2x^{\frac{1}{2}}$, apabila y menyusut daripada 16 kepada 15.7.
 - $y = \frac{x+2}{2}$, apabila y menokok daripada 2 kepada $2+p$.
- Diberi $y = \frac{16}{x^2}$, cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$ dan seterusnya tentukan nilai hampir bagi $\frac{16}{2.02^2}$.
- Jika $y = x^{\frac{5}{4}}$, cari peratus perubahan hampir dalam x apabila terdapat 4% perubahan dalam y .



Menyelesaikan masalah yang melibatkan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Sebilu bola yang berbentuk sfera dengan jejari 3 cm dipamkan udara ke dalamnya. Jejari bola itu berubah sedikit daripada 3 cm kepada 3.01 cm. Bolehkah anda tentukan perubahan kecil dalam jejari bola itu? Bagaimanakah pula dengan perubahan kecil dalam isi padu bola itu?

Masalah yang melibatkan perubahan kecil seperti ini boleh diselesaikan dengan menggunakan rumus penghampiran yang telah dipelajari sebelum

ini, iaitu $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$.



Cari perubahan kecil dalam isi padu, $l \text{ cm}^3$, sebiji bola kaca yang berbentuk sfera apabila jejarinya, $j \text{ cm}$, bertambah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Jejari, j sebiji bola kaca berubah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.
- ◆ Cari perubahan kecil dalam isi padu, l bola kaca itu.

2. Merancang strategi

- ◆ Cari nilai bagi $\frac{dl}{dj}$ apabila $j = 3 \text{ cm}$.
- ◆ Gunakan rumus $\delta l \approx \frac{dl}{dj} \times \delta j$.

4. Membuat refleksi

Apabila $j = 3 \text{ cm}$,

$$l = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$l = 113.0973 \text{ cm}^3$$

Apabila $j = 3.02 \text{ cm}$,

$$l = \frac{4}{3}\pi(3.02)^3$$

$$l = 115.3744 \text{ cm}^3$$

Perubahan isi padu bola kaca
 $= 115.3744 - 113.0973$
 $= 2.277$

Maka, perubahan isi padu bola kaca itu ialah 2.277 cm^3 .

3. Melaksanakan strategi

Katakan $l \text{ cm}^3$ dan $j \text{ cm}$ masing-masing ialah isi padu dan jejari bola kaca itu.

$$\text{Jadi, } l = \frac{4}{3}\pi j^3$$

$$\frac{dl}{dj} = 4\pi j^2$$

$$\text{Apabila } j = 3, \delta j = 3.02 - 3 = 0.02$$

$$\text{dan } \frac{dl}{dj} = 4\pi(3)^2 = 36\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Oleh itu, } \delta l &\approx \frac{dl}{dj} \times \delta j \\ &= 36\pi \times 0.02 \\ \delta l &= 2.262 \end{aligned}$$

Maka, perubahan kecil dalam isi padu bola kaca itu ialah 2.262 cm^3 .

Latihan Kendiri 2.15

1. Tempoh ayunan, T saat, bagi suatu bandul dengan panjang $l \text{ cm}$ diberi oleh $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. Cari perubahan hampir dalam T apabila l menokok daripada 9 cm kepada 9.05 cm.
2. Luas tompokan minyak yang berbentuk bulatan bertambah dari $4\pi \text{ cm}^2$ kepada $4.01\pi \text{ cm}^2$. Cari perubahan kecil yang sepadan dalam jejari tompokan minyak itu.
3. Panjang sisi sebuah kubus ialah $x \text{ cm}$. Cari perubahan kecil dalam isi padu kubus itu apabila setiap sisinya menyusut daripada 2 cm kepada 1.99 cm.
4. Cari perubahan kecil dalam isi padu sebuah sfera apabila jejariannya menyusut daripada 5 cm kepada 4.98 cm.

Latihan Formatif

2.4

Kuliz

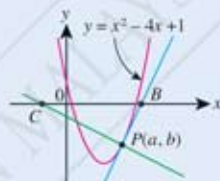
bit.ly/2PbDTre



1. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = \sqrt{x+1}$. Tangen dan normal kepada lengkung itu pada titik $P(0, 1)$ masing-masing menyalang paksi- x di Q dan R . Cari
- persamaan tangen dan koordinat Q ,
 - persamaan normal dan koordinat R ,
 - luas, dalam unit², segi tiga PQR .



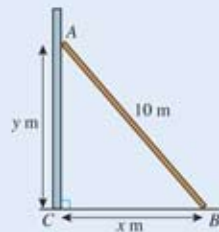
2. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2 - 4x + 1$ dengan garis tangen dan normal pada titik $P(a, b)$. Garis tangen itu berserenjang dengan garis $2y = 4 - x$ dan bertemu paksi- x di B . Garis normal pula bertemu paksi- x di C . Cari
- nilai a dan nilai b ,
 - persamaan tangen pada titik P dan koordinat B ,
 - persamaan normal pada titik P dan koordinat C ,
 - luas, dalam unit², segi tiga BPC .



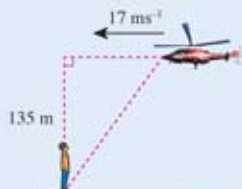
3. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak terbuka dengan tapak berbentuk segi empat sama bersisi x cm dan tinggi h cm. Kotak itu diperbuat daripada kepingan kadkod dengan luas 75 cm^2 .
- Tunjukkan bahawa isi padu kotak, $V \text{ cm}^3$, diberi oleh $V = \frac{1}{4}(75x - x^3)$.
 - Cari nilai x dengan keadaan V adalah maksimum dan juga isi padu maksimum kotak itu.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang kayu AB dengan panjang 10 m disandarkan pada dinding sebuah bangunan. Hujung kayu A ialah y m dari atas lantai dan hujung kayu B pula ialah x m dari kaki dinding C . Cari
- kadar perubahan hujung kayu A jika hujung kayu B menggelongsor menjauhi dinding pada kadar 3 ms^{-1} apabila $x = 8 \text{ m}$,
 - kadar perubahan hujung kayu B jika hujung kayu A menggelongsor ke bawah pada kadar 2 ms^{-1} apabila $y = 6 \text{ m}$.



5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah helikopter yang berada pada ketinggian 135 m dari permukaan tanah. Helikopter itu bergerak secara mengufuk ke arah budak lelaki dengan kadar 17 ms^{-1} . Cari kadar perubahan jarak antara helikopter dengan budak lelaki itu apabila jarak mengufuk antara helikopter dengan budak lelaki itu ialah 72 m.



BAB

2

PEMBEZAAN

Idea had: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Pembezaan dengan prinsip pertama

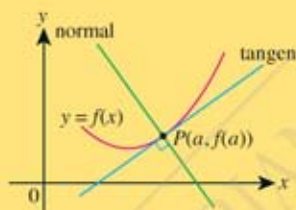
Jika $y = f(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, dengan δy ialah perubahan kecil dalam y dan δx ialah perubahan kecil dalam x .

Rumus pembezaan

- Jika $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, maka $\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$.
- Jika y ialah fungsi bagi u dan u ialah fungsi bagi x , maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ (Petua rantai)
- Jika u dan v ialah fungsi bagi x , maka $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ (Petua hasil darab)
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ (Petua hasil bahagi)

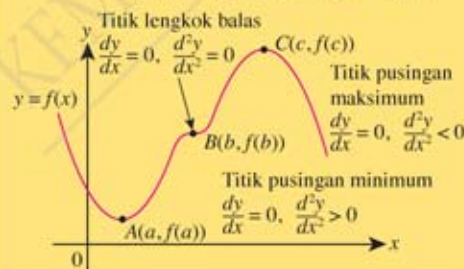
Aplikasi

Tangen dan normal



- Tangen: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- Normal: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Titik pegun bagi lengkung $y = f(x)$



Kadar perubahan yang terhubung

Jika dua pemboleh ubah yang terhubung x dan y berubah dengan masa, t , maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

Perubahan kecil dan penghampiran

Jika $y = f(x)$ dan perubahan kecil dalam x , iaitu δx menyebabkan perubahan kecil dalam y , iaitu δy , maka

$$\begin{aligned} \frac{\delta y}{\delta x} &\approx \frac{dy}{dx} \\ \delta y &\approx \frac{dy}{dx} \times \delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } f(x + \delta x) &\approx y + \delta y \\ &\approx y + \frac{dy}{dx}(\delta x) \end{aligned}$$



Penulisan Jurnal

1. Bandingkan kaedah pembezaan peringkat pertama bagi suatu fungsi $y = f(x)$ dengan menggunakan petua rantai, petua hasil darab dan petua hasil bahagi.
2. Ujian lakaran tangen dan ujian pembezaan peringkat kedua digunakan untuk menentukan sifat bagi titik-titik pusingan. Dengan menggunakan contoh yang bersesuaian, bincangkan kebaikan dan kelemahan kedua-dua ujian itu.
3. Persembahkan empat aplikasi pembezaan dalam satu folio digital dan paparkan hasilnya di hadapan kelas.

BAB

2



Latihan Sumatif

1. Selesaikan setiap had yang berikut. **TP 2**

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + 2x - x^2}{8 - 2x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = 8$

2. Diberi bahawa $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a - 5}{x + 4} = -3$, cari nilai bagi pemalar a . **TP 2**

3. Bezakan setiap yang berikut terhadap x . **TP 2**

(a) $\frac{1}{2x + 1}$

(b) $4x(2x - 1)^5$

(c) $\frac{6}{(2 - x)^2}$

(d) $x\sqrt{x + 3}$

4. Diberi $y = x(3 - x)$. **TP 2**

(a) Ungkapkan $y \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 12$ dalam sebutan x yang paling ringkas.

(b) Seterusnya, cari nilai x yang memuaskan $y \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 12 = 0$.

5. Kecerunan lengkung $y = ax + \frac{b}{x^2}$ pada titik $(-1, -\frac{7}{2})$ ialah 2. Cari nilai a dan nilai b . **TP 3**

6. Isi padu sebuah sfera bertambah dengan kadar tetap $20\pi \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$. Cari jejari sfera itu pada ketika jejari bertambah dengan kadar 0.2 cms^{-1} . **TP 2**

7. Diberi $y = \frac{14}{\sqrt{6x^3 + 1}}$, cari **TP 3**

(a) perubahan hampir dalam y apabila x menokok daripada 2 kepada 2.05,

(b) nilai hampir bagi y apabila $x = 2.05$.

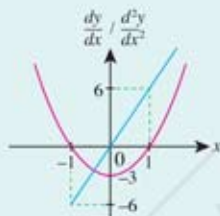
8. Diberi $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, cari peratus perubahan hampir dalam y apabila x berubah daripada 4 sebanyak 2%. **TP 3**

9. Diberi $y = 3x^2 - 4x + 6$ dan terdapat tokokan kecil dalam x sebanyak $p\%$ apabila $x = 2$. Cari peratus perubahan dalam y yang sepadan. **TP 3**

10. Rajah di sebelah menunjukkan graf $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi fungsi

$y = f(x)$. Diberi bahawa fungsi $y = f(x)$ melalui titik $(-1, 6)$ dan $(1, 2)$. Tanpa perlu mencari persamaan bagi fungsi $y = f(x)$, **TP 4**

- (a) tentukan koordinat titik maksimum dan titik minimum bagi graf fungsi $y = f(x)$,
(b) lakarkan graf bagi fungsi $y = f(x)$.



11. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada

lengkung $y = 3x^3 - 4x + 2$. Cari **TP 3**

- (a) persamaan tangen kepada lengkung pada titik $A(2, 1)$,
(b) koordinat titik lain pada lengkung itu dengan keadaan tangennya adalah selari dengan tangen pada titik A .

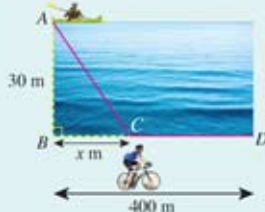


12. Dalam rajah di sebelah, $\triangle ADB$ ialah sebuah segi tiga tegak dengan panjang hipotenusnya ialah $6\sqrt{3}$ cm. Segi tiga itu diputarakan pada AD untuk membentuk sebuah kon tegak ABC . Cari **TP 4**

- (a) tinggi, (b) isi padu kon itu, dengan keadaan isi padu yang dijanakan adalah maksimum.



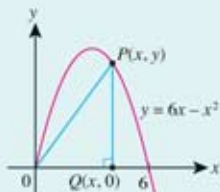
13. Dalam rajah di sebelah, Mukhriz mendayung sebuah kayak dari titik A yang berada 30 m jauhnya dari titik terdekat B di tepi pantai lurus BD ke titik C yang berada x m dari titik B . Kemudian, dia berbasikal dari titik C ke titik D yang jauhnya 400 m dari titik B dalam masa terpanjang yang mungkin. Cari jarak dari B ke C , jika dia mendayung pada halaju 40 mmin^{-1} dan berbasikal pada halaju 50 mmin^{-1} . **TP 5**



14. Sebuah kubus mengembang dengan keadaan sisi-sisinya berubah pada kadar 2 cms^{-1} . Cari kadar perubahan jumlah luas permukaan kubus itu apabila isi padunya ialah 8 cm^3 . **TP 3**

15. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 6x - x^2$ yang melalui asalan dan titik $P(x, y)$. **TP 3**

- (a) Jika Q ialah titik $(x, 0)$, tunjukkan bahawa luas, A bagi segi tiga POQ diberi oleh $A = \frac{1}{2}(6x^2 - x^3)$.
(b) Diberi bahawa x menokok dengan kadar 2 unit per saat, cari
(i) kadar tokokan bagi A apabila $x = 2$,
(ii) kadar susutan bagi A apabila $x = 5$.





16. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bekas berbentuk kon terbalik dengan jejari 12 cm dan tinggi 20 cm. **TP 6**

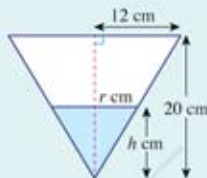
(a) Jika tinggi air di dalam bekas itu ialah h cm, tunjukkan bahawa isi padu air, $V \text{ cm}^3$, di dalam bekas itu diberi oleh

$$V = \frac{3}{25} \pi h^3.$$

(b) Air mengalir keluar melalui lubang di hujung bekas,

(i) cari perubahan kecil dalam isi padu air apabila h menyusut daripada 5 cm kepada 4.99 cm,

(ii) tunjukkan bahawa susutan kecil sebanyak $p\%$ dalam tinggi air itu akan menyebabkan susutan sebanyak $3p\%$ dalam isi padu.



EKSPLORASI MATEMATIK

Sebuah syarikat minuman multinasional mengadakan satu pertandingan mereka bentuk tin minuman bagi produk terbaharu syarikat, iaitu minuman berperisa kelapa.

PERTANDINGAN MEREKA BENTUK TIN MINUMAN

Kriteria-kriteria bagi rekaan tin minuman adalah seperti yang berikut:

- Kapasiti tin minuman ialah 550 cm^3 .
- Bentuk tin minuman yang perlu dipertimbangkan adalah seperti silinder, kon, piramid, prisma, kubus atau kuboid sahaja. Bentuk sfera adalah dilarang.
- Bahan yang digunakan untuk menghasilkan tin minuman mestilah minimum.
- Tin minuman mestilah unik dan menarik.



**Hadiah menarik
menanti anda!**

Sertai pertandingan tersebut bersama-sama rakan sekelas anda dengan berpanduan kriteria yang diberikan dan ikuti langkah-langkah yang berikut:

1. Reka tiga bentuk bekas tin minuman yang mungkin.
2. Bagi setiap bentuk yang berkapasiti 550 cm^3 , tunjukkan ukuran bekas itu dengan luas permukaannya adalah minimum. Seterusnya, nyatakan luas permukaan minimum itu.
3. Pilih dan cadangkan satu rekaan terbaik untuk pertandingan itu dengan menyenaraikan kelebihan rekaan tersebut.