



BAB

5

Rangkaian dalam Teori Graf

Anda akan mempelajari

► Rangkaian

Sistem pengangkutan di Malaysia yang terdiri daripada pengangkutan darat, air dan udara sedang membangun seiring dengan kemajuan negara. Sistem pengangkutan darat, terutamanya pengangkutan awam membangun dengan pesatnya mengikut pertambahan bilangan pengguna terutamanya di bandar-bandar besar. Perkhidmatan rel bandaran seperti *Light Rail Transit* (LRT), *Mass Rapid Transit* (MRT), monorel dan tren komuter di kawasan bandar merupakan antara sistem pengangkutan awam yang kian mendapat sambutan baik daripada pengguna.

Tahukah anda sistem pengangkutan juga merupakan sejenis rangkaian?

Maslahat Bab

Rangkaian digunakan untuk mengaitkan objek-objek dalam bidang yang sama berdasarkan kehendak bidang tersebut. Rangkaian digunakan secara meluas dalam bidang pengangkutan, komputer, sosial, perniagaan, perubatan, sains, neurosains, sains sosial, penyiasatan, permainan dan sebagainya.



Imbasan Silam



Leonhard Euler
(1707-1783)

Leonhard Euler ialah salah seorang ahli matematik abad ke-18 yang dilahirkan di Basel, Switzerland. Pada tahun 1735, Euler menyelesaikan masalah matematik dan logik yang tidak jelas, yang dikenali sebagai Masalah Tujuh Jambatan Königsberg dan menghasilkan struktur matematik yang dipanggil graf, sebuah gambar yang terdiri daripada titik-titik (bucu-bucu) yang disambungkan oleh garis atau lengkung (tepi).



<http://yakini-pelajar.com/Euler/5.pdf>

JARINGAN KATA

- | | |
|---------------|-------------------|
| • berpemberat | • <i>weighted</i> |
| • bucu | • <i>vertex</i> |
| • darjah | • <i>degree</i> |
| • diskret | • <i>discrete</i> |
| • gelung | • <i>loop</i> |
| • graf | • <i>graph</i> |
| • mudah | • <i>simple</i> |
| • pokok | • <i>tree</i> |
| • rangkaian | • <i>network</i> |
| • subgraf | • <i>subgraph</i> |
| • tepi | • <i>edge</i> |
| • terarah | • <i>directed</i> |

5.1 Rangkaian

Apakah kaitan antara rangkaian dengan graf?

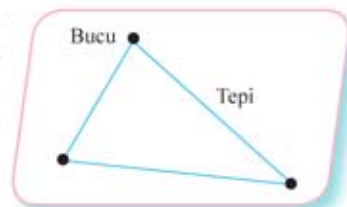
Semasa di Tahun 5, anda telah diperkenalkan dengan sistem rangkaian berkaitan dengan komputer dan dunia Internet melalui mata pelajaran Teknologi Maklumat dan Komunikasi.

Hubung kait antara sekumpulan komputer dengan peranti berkaitan, iaitu rangkaian komputer membolehkan pencarian, penggunaan dan perkongsian maklumat dilakukan dengan mudahnya. Tahukah anda apakah kaitan antara rangkaian dengan graf?

Graf digunakan untuk mewakili data yang terdiri daripada objek diskret dan menggambarkan kaitan antara objek tersebut secara grafik yang mudah difahami. Dalam bidang matematik khususnya teori graf, **graf** ditafsirkan sebagai suatu siri titik sama ada berkait atau tidak antara satu sama lain melalui garis. Titik dikenali sebagai **bucu** dan garis yang mengaitkan dua bucu ialah **tepi**.

Standard Pembelajaran

Mengenal dan menerangkan rangkaian sebagai graf.



Graf juga sering digunakan untuk mewakili suatu rangkaian. **Rangkaian** merupakan sebahagian daripada graf dengan keadaan bucu dan tepi mempunyai sifat tersendiri. Struktur data rangkaian mempunyai hubungan banyak kepada banyak. Contoh graf yang melibatkan rangkaian adalah seperti yang berikut.



Rangkaian pengangkutan darat

Bucu

Kawasan, pekan, bandar atau sesuatu bangunan yang dikaitkan

Tepi

Jalan raya, lebuh raya atau landasan kereta api



Rangkaian sosial

Bucu

Individu, kumpulan atau organisasi

Tepi

Jenis hubungan seperti kawan, rakan sekerja atau keluarga

ZON INFORMASI

Sistem Rangkaian Sejuk (*Cold Chain System*) ialah sejenis sistem dalam dunia perubatan. Sistem ini berfungsi untuk mengangkut, mengedarkan dan menyimpan vaksin serta darah dalam julat suhu yang tetap bermula dari tempat asal ke tempat penggunaan.

Tatatanda graf merupakan set pasangan tertib iaitu $G = (V, E)$ dengan keadaan;

- V ialah set bintang atau bucu.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

- E ialah set tepi atau garis yang menghubungkan sepasang bucu.

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

$$E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}; a \text{ dan } b \text{ ialah pasangan bucu.}$$

Darjah, d bagi suatu bucu, v ialah bilangan tepi yang mengaitkannya dengan bucu yang lain. Jumlah bilangan darjah suatu graf ialah dua kali bilangan tepi, iaitu;

$$\sum d(v) = 2E; v \in V$$

ZON INFORMASI

G = Graf (*graph*)

v = Bucu (*vertex*) atau bintang.

e = Tepi (*edge*) atau garis atau lengkung.

d = Darjah (*degree*)

Σ = Jumlah



MEMORI SAYA

$\in$ ialah unsur

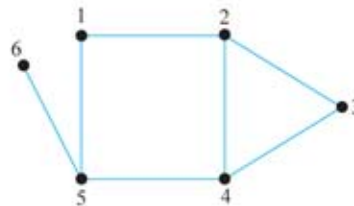
Apakah yang anda faham tentang graf mudah?

Graf mudah ialah graf yang tidak mengandungi gelung atau berbilang tepi. Bilangan darjah suatu graf mudah ialah dua kali bilangan tepi.

Contoh 1

Berdasarkan graf mudah di sebelah, tentukan

- V dan $n(V)$
- E dan $n(E)$
- bilangan darjah.



Penyelesaian:

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ← Set bucu
 $n(V) = 6$ ← Bilangan bucu
- $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ ← Set pasangan bucu
 $n(E) = 7$ ← Bilangan tepi

- Bilangan darjah

$$\begin{aligned}\sum d(v) &= 2(E) \\ &= 2(7) \\ &= 14\end{aligned}$$

Darjah bagi suatu bucu : $d(1) = 2$
 $d(2) = 3$
 $d(3) = 2$
 $d(4) = 3$
 $d(5) = 3$
 $d(6) = 1$
Jumlah = 14

ZON INFORMASI

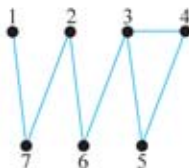
Tepi untuk pasangan bucu (1, 2) adalah sama dengan pasangan bucu (2, 1).

Darjah bucu 1 ialah dua iaitu tepi yang mengaitkan bucu 1 dengan bucu 2 dan bucu 1 dengan bucu 5

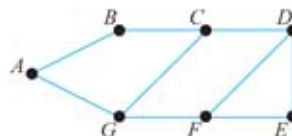
Contoh 2

Nyatakan bilangan bucu, tepi dan darjah bagi graf mudah berikut:

-



-



Penyelesaian:

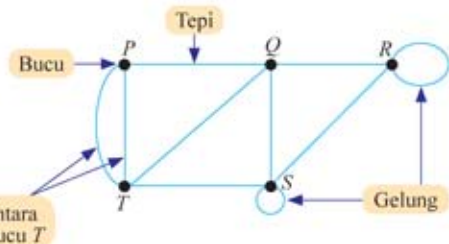
(a) $\text{Bucu} = 7$
 $\text{Tepi} = 7$
 $\text{Darjah} = 2 \times \text{Tepi}$
 $= 2 \times 7$
 $= 14$

(b) $\text{Bucu} = 7$
 $\text{Tepi} = 9$
 $\text{Darjah} = 2 \times \text{Tepi}$
 $= 2 \times 9$
 $= 18$

Apakah maksud berbilang tepi dan gelung pada graf?

Berbilang tepi

- Melibatkan dua bucu.
- Kaitan antara dua bucu tersebut dinyatakan melalui lebih daripada satu tepi.
- Bilangan darjah ialah dua kali bilangan tepi.



Gelung

- Melibatkan satu bucu.
- Tepi berbentuk lengkung atau bulatan yang berbalik kepada bucu asal.
- Bilangan darjah setiap gelung ialah dua.

Katakan, graf di sebelah ditulis dalam bentuk set pasangan tertib, $G(V, E)$, maka,

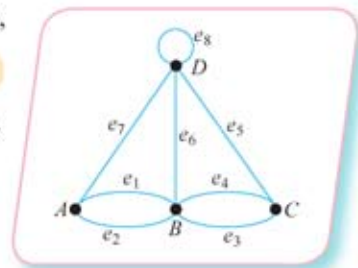
$V = \{A, B, C, D\}$
 $E = \{(A, B), (A, B), (B, C), (B, C), (C, D), (B, D), (A, D), (D, D)\}$
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Berbilang tepi

Gelung

Tepi AB yang pertama

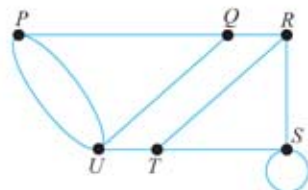
Tepi AB yang kedua



Contoh 3

Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi. Nyatakan

- V dan $n(V)$
- E dan $n(E)$
- bilangan darjah.



Penyelesaian:

- $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
 $n(V) = 6$
- $E = \{(P, Q), (P, U), (P, U), (Q, R), (Q, U), (R, S), (R, T), (S, S), (S, T), (T, U)\}$
 $n(E) = 10$



MEMORI SAYA

V = Set bucu (*Vertex*)
 E = Set tepi (*Edge*)

(c) Bilangan darjah = 20

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bucu } P = 3 \\ \text{Bucu } Q = 3 \\ \text{Bucu } R = 3 \\ \text{Bucu } S = 4 \\ \text{Bucu } T = 3 \\ \text{Bucu } U = 4 \end{array} \right\}$$

Jumlah bilangan darjah ialah 20



Bilangan darjah setiap gelung ialah dua, iaitu pusingan mengikut arah jam dan pusingan mengikut lawan arah jam.

Contoh 4

Lukis satu graf mudah mengikut maklumat yang diberikan.

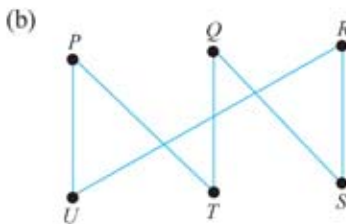
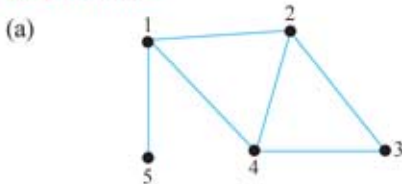
(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

(b) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$

$E = \{(P, U), (P, T), (Q, T), (Q, S), (R, S), (R, U)\}$

Penyelesaian:


Contoh 5

Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung mengikut maklumat yang diberikan.

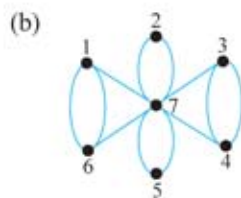
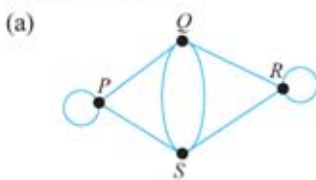
(a) $V = \{P, Q, R, S\}$

$E = \{(P, P), (P, Q), (P, S), (Q, S), (Q, S), (Q, R), (S, R), (R, R)\}$

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E = \{(1, 6), (1, 6), (2, 7), (2, 7), (5, 7), (5, 7), (3, 4), (3, 4), (1, 7), (6, 7), (3, 7), (4, 7)\}$

Penyelesaian:



- Pasangan bucu gelung berbentuk (a, a) .
- Pasangan bucu berbilang tepi berbentuk (a, b) dan (a, b) .

Contoh 6

Tentukan sama ada suatu graf boleh dilukis bagi bilangan darjah yang diberikan.

(a) 3, 2, 2, 1, 3

(b) 2, 1, 1, 3, 3, 2

Penyelesaian:

(a) Jumlah darjah = $3 + 2 + 2 + 1 + 3$
 $= 11$

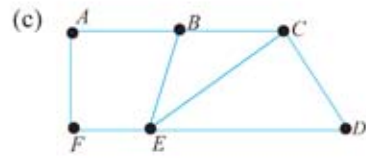
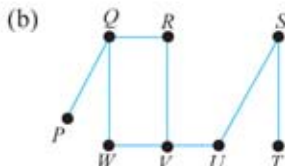
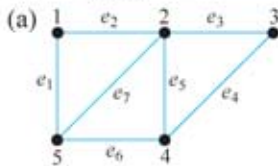
Graf tidak boleh dilukis kerana jumlah darjah adalah ganjil.

(b) Jumlah darjah = $2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 2$
 $= 12$

Graf boleh dilukis kerana jumlah darjah adalah genap.

Praktis Kendiri 5.1a

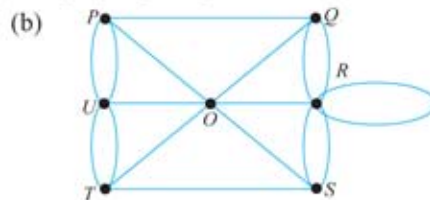
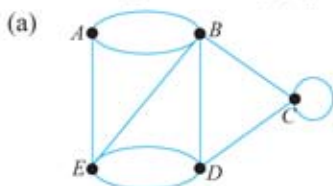
1. Diberi tiga graf mudah.



Bagi setiap graf, tentukan

- (i) V dan $n(V)$ (ii) E dan $n(E)$ (iii) bilangan darjah

2. Diberi dua graf berbilang tepi dan graf yang mempunyai gelung.



Bagi setiap graf, tentukan

- (i) V dan $n(V)$ (ii) E dan $n(E)$ (iii) bilangan darjah

3. Lukis satu graf mudah mengikut maklumat yang diberikan.

- (a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $E = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$

- (b) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
 $E = \{(P, U), (P, T), (Q, U), (Q, T), (Q, R), (R, S), (R, T), (S, T)\}$

4. Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung mengikut maklumat yang diberikan.

- (a) $V = \{P, Q, R, S\}$
 $E = \{(P, S), (P, S), (Q, R), (Q, R), (P, P), (S, S), (Q, Q), (R, R), (P, Q), (R, S)\}$

- (b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $E = \{(1, 5), (1, 5), (3, 5), (3, 5), (1, 1), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

5. Lukis graf mudah bagi bilangan darjah yang diberikan.

- (a) 2, 3, 2, 3, 4 (b) 1, 2, 3, 3, 3, 2

6. Lukis graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi bagi bilangan darjah yang diberikan.

- (a) 3, 3, 4 (b) 2, 2, 4, 6, 6

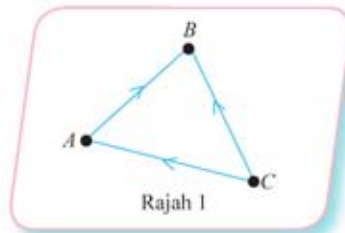
Apakah beza antara graf terarah dengan graf tak terarah?

Graf terarah ialah graf dengan keadaan tepi yang mengaitkan dua bucu ditanda dengan arah kaitan. Graf terarah biasanya digunakan untuk mewakili aliran suatu proses, peta jalan raya, peta penerbangan, litar elektrik, rangkaian komputer, carta organisasi dan sebagainya.



Standard Pembelajaran

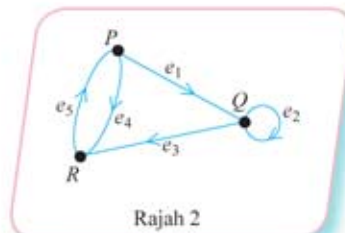
- Membanding beza
- Graf terarah dengan graf tak terarah.
- Graf berpemberat dengan graf tak berpemberat.



Rajah 1

Rajah 1 menunjukkan suatu graf mudah dan terarah. Mengikut arah anak panah yang ditandakan, didapati bahawa,

- bagi tepi AB , bucu A ialah bucu awal dan bucu B ialah bucu akhir.
- bagi tepi BC , bucu C ialah bucu awal dan bucu B ialah bucu akhir.
- semua tepi dikaitkan dengan satu arah sahaja.



Rajah 2

Rajah 2 menunjukkan graf terarah yang mempunyai gelung dan berbilang tepi. Mengikut arah anak panah yang ditandakan, didapati bahawa,

- $e_4 = (P, R)$; P ialah bucu awal dan R ialah bucu akhir.
- $e_5 = (R, P)$; R ialah bucu awal dan P ialah bucu akhir.
- $e_2 = (Q, Q)$; Q ialah bucu awal dan bucu akhir kerana e_2 merupakan sebuah gelung.

ZON INTERAKTIF



Sistem peredaran darah dalam badan manusia juga dikategorikan sebagai graf terarah. Mengapa?

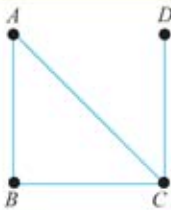
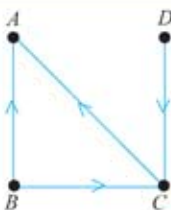
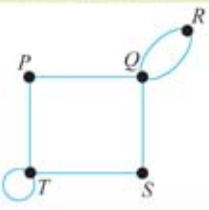
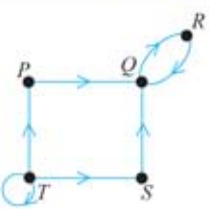
ZON INTERAKTIF



Bagi rangkaian tenaga elektrik, stesen jana kuasa, stesen transformer, pencawang serta pengguna ialah bucu dan kabel serta wayar berperanan sebagai tepi. Adakah rangkaian tenaga elektrik merupakan graf terarah atau graf tak terarah? Bincangkan.

Graf tak terarah ialah graf mudah atau graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi yang dilukis tanpa penandaan arah pada tepi yang mengkaitkan dua bucu.

Beza antara graf terarah dengan graf tak terarah.

Jenis Graf	Graf	Set V dan Set E	Darjah
Graf mudah	Graf tak terarah 	$V = \{A, B, C, D\}$ $E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, D)\}$ Penulisan kedudukan pasangan bucu adalah bebas. Kedua-dua pasangan bucu (A, B) atau (B, A) boleh mewakili tepi AB.	$d(A) = 2, d(B) = 2,$ $d(C) = 3, d(D) = 1$ $\Sigma d(V) = 8$
	Graf terarah 	$V = \{A, B, C, D\}$ $E = \{(B, A), (C, A), (B, C), (D, C)\}$ Penulisan kedudukan pasangan bucu adalah mengikut arah pada tepi. (B, A) dan (A, B) ialah set pasangan bucu yang mewakili tepi yang berlainan.	$d_{in}(A) = 2$ dan $d_{out}(A) = 0$ Maka, $d(A) = 2 + 0$ $d(A) = 2$ $d_{in}(A)$ bermaksud bilangan darjah bagi tepi yang masuk ke bucu A. $d_{out}(A)$ bermaksud bilangan darjah bagi tepi yang keluar dari bucu A. $d_{in}(B) = 0, d_{out}(B) = 2$ $d_{in}(C) = 2, d_{out}(C) = 1$ $d_{in}(D) = 0, d_{out}(D) = 1$ $\Sigma d(V) = 8$
Graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi	Graf tak terarah 	$V = \{P, Q, R, S, T\}$ $E = \{(P, T), (P, Q), (Q, R), (Q, R), (Q, S), (S, T), (T, T)\}$	$d(P) = 2, d(Q) = 4$ $d(R) = 2, d(S) = 2$ $d(T) = 4$ $\Sigma d(V) = 14$
	Graf terarah 	$V = \{P, Q, R, S, T\}$ $E = \{(P, Q), (Q, R), (R, Q), (S, Q), (T, S), (T, T), (T, P)\}$	$d_{in}(P) = 1, d_{out}(P) = 1$ $d_{in}(Q) = 3, d_{out}(Q) = 1$ $d_{in}(R) = 1, d_{out}(R) = 1$ $d_{in}(S) = 1, d_{out}(S) = 1$ $d_{in}(T) = 1, d_{out}(T) = 3$ Gelung = 1 $(T, P) = 1$ $(T, S) = 1$ $\Sigma d(V) = 14$

Apakah beza antara graf berpemberat dengan graf tak berpemberat?

	Graf berpemberat	Graf tak berpemberat
Jenis graf	Graf terarah dan graf tak terarah.	Graf terarah dan graf tak terarah.
Tepi	Diberi nilai atau pemberat.	Tiada nilai atau pemberat yang dinyatakan.
Contoh	Tepi mewakili: • jarak di antara dua bandar. • masa yang diambil untuk suatu gerakan. • nilai arus suatu litar elektrik. • kos dan sebagainya.	Tepi mengaitkan maklumat: • hierarki jawatan dalam carta organisasi. • peta alir. • peta pokok. • peta buih.

Contoh 7

Lukis graf terarah mengikut maklumat yang diberikan.

 (a) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
 $E = \{(P, Q), (P, R), (R, Q), (S, R), (S, Q), (S, T)\}$

 (b) Mempunyai satu gelung pada bucu Q dan RS ialah berbilang tepi dengan keadaan

$$d_{in}(P) = 1, d_{out}(P) = 1$$

$$d_{in}(Q) = 3, d_{out}(Q) = 2$$

$$d_{in}(R) = 0, d_{out}(R) = 3$$

$$d_{in}(S) = 3, d_{out}(S) = 1$$


 Bagi contoh 7(a) bucu U wujud dalam set V tetapi tidak dalam set E . Hal ini bermakna bucu U tidak berkaitan dengan bucu-bucu lain dan dikenali sebagai **bucu terpencil**.

Penyelesaian:

(a) Pasangan bucu

 (P, Q)
 (P, R)
 (R, Q)
 (S, R)
 (S, Q)
 (S, T)

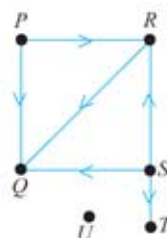
Arah

 $P \text{ ke } Q$
 $P \text{ ke } R$
 $R \text{ ke } Q$
 $S \text{ ke } R$
 $S \text{ ke } Q$
 $S \text{ ke } T$

 Dua tepi dari bucu P

 Satu tepi dari bucu R

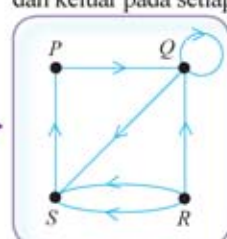
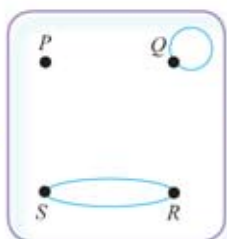
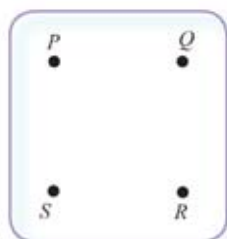
 Tiga tepi dari bucu S

 Bucu T hanya berkaitan dengan bucu S


(b) Jumlah bucu = 4

 Lukis berbilang tepi RS dan gelung pada bucu Q .

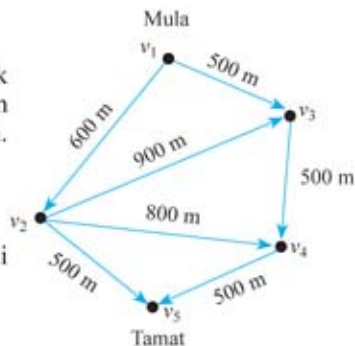
Lengkapkan graf mengikut bilangan tepi yang masuk dan keluar pada setiap bucu.



Contoh 8

Rajah di sebelah menunjukkan pilihan laluan sehala Izarul untuk menjalankan latihan larian. Bucu v_1 ialah tempat permulaan dan bucu v_5 ialah tempat terakhir sebelum dia balik ke rumah. Tentukan,

- jarak laluan sehala yang terpendek, dari v_1 ke v_5 .
- jarak laluan sehala yang terpanjang, dari v_1 ke v_5 .
- bucu-bucu yang perlu dilalui jika jarak larian sehala adalah di antara 1.4 km hingga 2.1 km.



Penyelesaian:

- Laluan sehala terpendek
 $= v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5$
 $= (600 + 500) \text{ m}$
 $= 1100 \text{ m}$
 $= 1.1 \text{ km}$
- Laluan sehala terpanjang
 $= v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$
 $= (600 + 900 + 500 + 500) \text{ m}$
 $= 2500 \text{ m}$
 $= 2.5 \text{ km}$
- v_1, v_3, v_4, v_5 dan v_1, v_2, v_4, v_5



Praktis Kendiri 5.1b

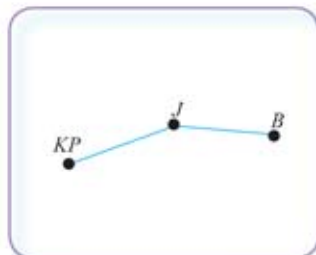
- Nyatakan dua perbezaan antara graf terarah dengan graf tak terarah.
- Apakah maksud pemberat pada graf berpemberat?
- Lukis graf terarah mengikut maklumat yang diberikan.
 - $V = \{P, Q, R, S, T, U, V\}$
 $E = \{(P, Q), (Q, R), (Q, S), (S, P), (S, R), (S, T), (U, T)\}$
 - Mempunyai satu gelang pada bucu Q dan satu gelang pada bucu S .
 - QS ialah berbilang tepi.
 - $d_{in}(P) = 0, d_{out}(P) = 2$
 $d_{in}(Q) = 4, d_{out}(Q) = 2$
 $d_{in}(R) = 0, d_{out}(R) = 2$
 $d_{in}(S) = 4, d_{out}(S) = 2$
- Berdasarkan maklumat dalam Jadual 1 dan Jadual 2, lengkapkan graf berpemberat dan tak terarah yang diberikan.

Nama tempat	Bucu
Kuala Pilah	KP
Bahau	B
Rompin	R
Batu Kikir	BK
Juasseh	J

Jadual 1

Pasangan bucu	Pemberat (km)
(J, B)	11.6
(KP, R)	40
(B, R)	20.7
(B, BK)	11.4
(BK, J)	6.6
(KP, J)	9.3

Jadual 2



Graf tidak lengkap

- Encik Benny dan Encik Muruges memandu kereta masing-masing dari Kuala Pilah ke Rompin dengan keadaan:
- Encik Benny memandu mengikut jarak terpendek.
 - Encik Muruges memandu melalui Juasseh dan Bahau.
- Hitung beza jarak, dalam km, perjalanan dari Kuala Pilah ke Rompin oleh Encik Benny dan Encik Muruges.

Bagaimanakah anda mengenal dan melukis subgraf dan pokok?

Apakah yang anda faham tentang subgraf?

Subgraf merupakan sebahagian atau keseluruhan suatu graf yang dilukis semula. Suatu graf H dikatakan subgraf kepada graf G jika,

- bucu-bucu graf H ialah subset kepada bucu-bucu graf G ,
iaitu $V(H) \subset V(G)$.
- tepi-tepi graf H ialah subset kepada tepi-tepi graf G , iaitu $E(H) \subset E(G)$.
- pasangan bucu setiap tepi graf H adalah sama dengan tepi graf G .

Secara ringkasnya,

- suatu bucu dalam graf G ialah subgraf bagi graf G .
- suatu tepi dalam graf G bersama bucu-bucu yang dikaitkan ialah subgraf bagi graf G .
- setiap graf ialah subgraf kepada dirinya.



Standard Pembelajaran

Mengenal dan melukis subgraf dan pokok.



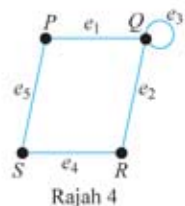
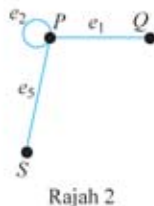
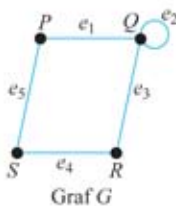
ZON INFORMASI

Simbol $\subseteq$ juga boleh digunakan untuk subset.

Contoh

9

Tentukan sama ada Rajah 1, Rajah 2, Rajah 3 dan Rajah 4 ialah subgraf bagi graf G .



Penyelesaian:

Rajah 1 – Ya kerana pasangan bucu untuk tepi e_5 adalah sama.

$$\{e_5\} \subset \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \text{ dan } \{P, S\} \subset \{P, Q, R, S\}$$

Rajah 2 – Tidak kerana kedudukan gelung e_2 bukan pada bucu Q .

Rajah 3 – Tidak kerana tepi yang mengaitkan bucu P dan bucu S adalah bukan e_3 .

Rajah 4 – Tidak kerana tepi gelung dan tepi yang mengaitkan bucu Q dan bucu R adalah salah.

Apakah yang anda faham tentang pokok?

Pokok suatu graf ialah subgraf bagi graf tersebut dengan ciri-ciri berikut:

- Graf mudah iaitu tanpa gelung atau berbilang tepi.
- Semua bucu mesti berkait dan setiap pasangan bucu dikaitkan oleh satu tepi sahaja.
- Bilangan tepi = bilangan bucu – 1
Bilangan bucu = n
Bilangan tepi = $n - 1$



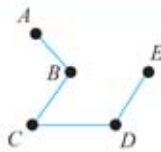
ZON INFORMASI

Sebutan pokok diperkenalkan oleh Arthur Cayley, seorang ahli Matematik Inggeris pada tahun 1857.



ZON INFORMASI

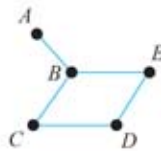
Carta salasilah keluarga ialah contoh pokok.



Rajah 1

Rajah 1 merupakan suatu pokok kerana,

- semua bucu berkait.
- setiap pasangan bucu dikaitkan oleh satu tepi sahaja.
- tidak ada gelung atau berbilang tepi.
- $\text{Bucu} = 5$, $\text{Tepi} = 4$.



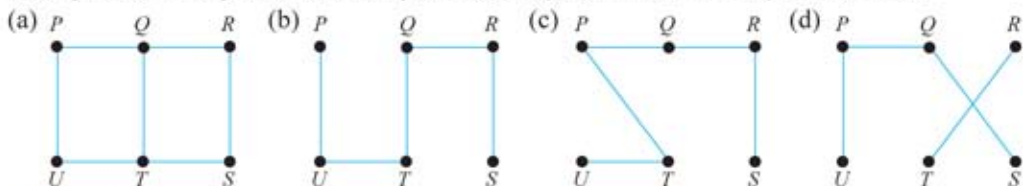
Rajah 2

Rajah 2 bukan suatu pokok kerana,

- bucu B dan bucu E boleh dikaitkan dengan dua cara.
 - (i) $B \rightarrow E$
 - (ii) $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$
- $\text{Bucu} = 5$, $\text{Tepi} = 5$.

Contoh 10

Kenal pasti sama ada pokok atau bukan pokok untuk rajah di bawah. Berikan justifikasi anda.



Penyelesaian:

- (a) Bukan pokok. $\text{Bucu} = 6$, $\text{tepi} = 7$. Setiap pasangan bucu boleh dikaitkan dengan pelbagai cara.
- (b) Pokok. $\text{Bucu} = 6$, $\text{tepi} = 5$. Setiap pasangan bucu hanya dikaitkan oleh satu tepi.
- (c) Pokok. $\text{Bucu} = 6$, $\text{tepi} = 5$. Setiap pasangan bucu hanya dikaitkan oleh satu tepi.
- (d) Bukan pokok. $\text{Bucu} = 6$, $\text{tepi} = 4$. Bucu R dan bucu T tidak dikaitkan dengan bucu lain.

Contoh 11

Lukis satu pokok dengan maklumat yang diberi.

- (a) $\text{Bucu} = 6$
- (b) $\text{Bucu} = 8$
- (c) $\text{Tepi} = 4$
- (d) $\text{Tepi} = 9$

Penyelesaian:

- (a) $\text{Bucu} = 6$
 $\text{Tepi} = 5$
- (b) $\text{Bucu} = 8$
 $\text{Tepi} = 7$
- (c) $\text{Tepi} = 4$
 $\text{Bucu} = 5$
- (d) $\text{Tepi} = 9$
 $\text{Bucu} = 10$



Contoh 12

Lukis dua pokok berdasarkan graf yang diberikan di bawah.

(a)



(b)


ZON INFORMASI

Pokok digunakan untuk menentukan laluan terpendek dengan syarat semua bucu dilalui hanya sekali.

Penyelesaian:

(a) Bucu = 5

Tepi = 7 (3 tepi perlu dibuang)

(i)



(ii)



(b) Bucu = 6

Tepi = 8 (3 tepi perlu dibuang)

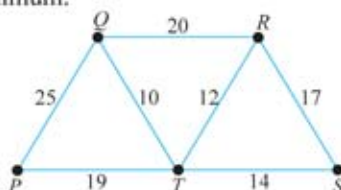
(i)



(ii)

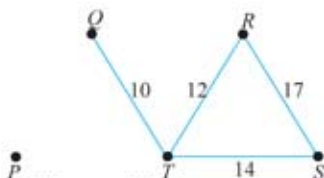

Contoh 13

Rajah di bawah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat. Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum.


Penyelesaian:
Langkah 1

Bucu = 5, tepi = 7

- 3 tepi perlu dibuang.
- keluarkan tepi dengan pemberat nilai tertinggi (PQ , QR , PT)

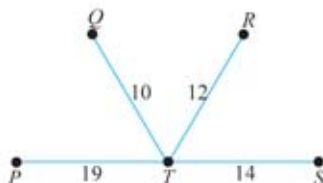


Graf di atas bukan pokok kerana,

- bucu P tidak dikaitkan dengan bucu lain.
- tiga tepi, RS , ST dan RT mengaitkan tiga bucu sahaja.

Langkah 2

- Antara pemberat bernilai 19 dengan 25, pemberat bernilai 19 perlu dikekalkan kerana nilainya lebih rendah.
- Antara pemberat 12, 14 dengan 17, pemberat bernilai 17 perlu dikeluarkan.



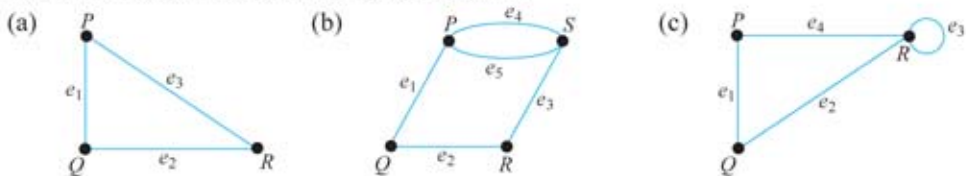
Graf yang terhasil ialah pokok.
Jumlah pemberat minimum pokok
 $= 10 + 12 + 14 + 19$
 $= 55$

Praktis Kendiri 5.1c

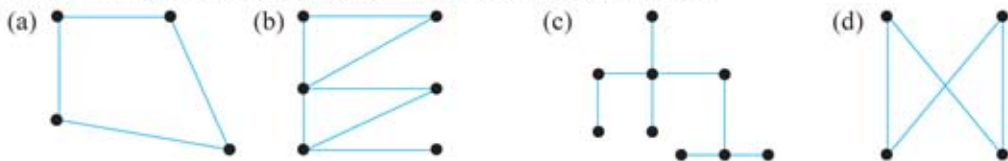
1. Tentukan sama ada rajah-rajah yang diberikan ialah subgraf bagi graf G .

Graf G	Rajah 1	Rajah 2	Rajah 3	Rajah 4	Rajah 5
Rajah 6	Rajah 7	Rajah 8	Rajah 9	Rajah 10	Rajah 11

2. Lukis lima subgraf bagi graf-graf yang diberikan.



3. Kenal pasti pokok dan bukan pokok daripada rajah-rajah di bawah.



4. Lukis satu pokok dengan maklumat yang diberikan.

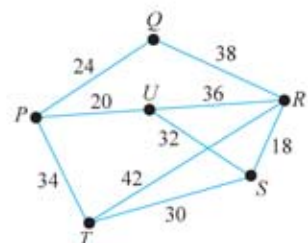
- (a) Bucu = 7 (b) Bucu = 9 (c) Tepi = 5 (d) Tepi = 9

5. Lukis dua pokok berdasarkan graf yang diberikan.



6. Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat.

- (a) Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum.
(b) Berapakah jumlah pemberat minimum?



Bagaimanakah anda mewakili maklumat dalam bentuk rangkaian?

Rangkaian merupakan satu bentuk graf yang unik dan boleh digunakan untuk mewakili maklumat yang bertindih atau bersilang. Rangkaian digunakan secara meluas dan merangkumi hampir setiap bidang dalam kehidupan seharian. Rangkaian yang dilukis atau dipaparkan dalam bentuk grafik membolehkan perkaitan suatu maklumat atau struktur data mudah difahami.



Mewakili maklumat dalam bentuk rangkaian.

Rangkaian boleh dilukis sebagai:

- graf terarah dan berpemberat atau graf terarah dan tak berpemberat
- graf tak terarah dan berpemberat atau graf tak terarah dan tak berpemberat

Rangkaian Pengangkutan

Rangkaian pengangkutan boleh digambarkan dengan menggunakan graf berpemberat dan graf tak berpemberat. Pemberat boleh mewakili jarak, masa perjalanan atau kos perjalanan. Sistem navigasi terkenal dalam rangkaian pengangkutan dengan pemberat ialah Sistem Kedudukan Global atau lebih dikenali sebagai GPS (*Global Position System*). Rajah di sebelah menunjukkan rangkaian transit kereta api yang terdapat di Kuala Lumpur Sentral (KL Sentral). Graf tak terarah ini merupakan satu contoh rangkaian pengangkutan dengan keadaan bucu mewakili nama stesen yang dikaitkan dan tepi mewakili jenis keretapi.



Contoh 14

Encik Voon bersama keluarganya bercadang untuk melawat tempat bersejarah di Melaka. Peta di sebelah menunjukkan tiga pilihan laluan beserta jarak dan anggaran masa yang akan diambil dari Tangkak ke bangunan A Famosa, Melaka.



Katakan, P ialah laluan berjarak 46.3 km, Q ialah laluan berjarak 50.2 km dan R ialah laluan berjarak 53.3 km. Pada pandangan anda, mengapakah laluan P mengambil jangka masa yang lebih panjang berbanding laluan lain walaupun jarak laluan pilihan P adalah yang terpendek?

Penyelesaian:

Laluan P mengambil jangka masa yang panjang mungkin kerana laluan tersebut melalui kawasan bandar yang sesak dan bilangan pengguna jalan raya yang lebih banyak berbanding dengan laluan lain.

Rangkaian Sosial

Rangkaian sosial merupakan salah satu rangkaian yang semakin popular terutamanya dalam kalangan remaja dan orang dewasa yang bekerja. Rangkaian sosial digunakan untuk peluang pekerjaan, peluang perniagaan, bersosial, kekeluargaan, pendidikan, media sosial, hubungan dengan masyarakat di seluruh dunia dan sebagainya.

Walaupun rangkaian sosial menjadi suatu platform utama untuk pelbagai aktiviti dan membawa kebaikan, anda sebagai seorang murid harus berhati-hati dan bersederhana dalam penggunaan rangkaian sosial agar tidak leka, terperdaya atau tertipu.

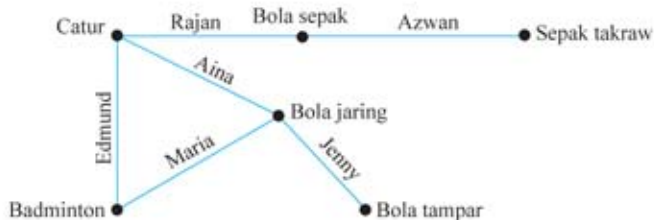
Contoh 15

Jadual di bawah menunjukkan data enam orang murid dan dua jenis permainan yang diminati. Tukar maklumat yang diberi dalam bentuk rangkaian.

Nama murid	Permainan
Edmund	Badminton, Catur
Azwan	Bola sepak, Sepak takraw
Rajan	Catur, Bola sepak
Aina	Catur, Bola jaring
Maria	Badminton, Bola jaring
Jenny	Bola jaring, Bola tampar

Penyelesaian:

Katakan bucu ialah jenis permainan dan tepi mewakili nama murid.



Celk Minda

Nyatakan contoh rangkaian sosial yang anda tahu.

ZON INTERAKTIF



Bincangkan kesan negatif penggunaan rangkaian sosial.



Celk Minda

Apakah maksud LTE dan 4G yang sering digunakan dalam rangkaian Internet tanpa wayar?

ZON INTERAKTIF



Penyelesaian suatu kes jenayah juga berkaitan dengan graf. Semua bukti yang diperoleh dikaitkan antara satu dengan yang lain. Bincangkan maklumat yang boleh diwakilkan oleh bucu dan tepi.



Pilih maklumat yang tidak bersilang sebagai tepi.

ZON INTERAKTIF



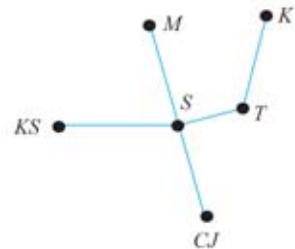
Adakah rantaian makanan merupakan suatu rangkaian? Bincangkan.


Praktis Kendiri 5.1d

Nama tempat	Bucu	Pasangan bucu	Jarak (km)
Kuala Sepetang	KS	(KS, M)	8
Matang	M	(K, M)	8.4
Kamunting	K	(K, T)	5.2
Simpang	S	(S, T)	5.9
Taiping	T	(S, M)	3.5
Changkat Jong	CJ	(S, KS)	11
		(CJ, S)	4.9
		(CJ, KS)	15
		(CJ, T)	10

Jadual 1

Jadual 2



Rajah 1

- Jadual 1 dan Jadual 2 di atas menunjukkan nama dan jarak enam tempat di negeri Perak. Rajah 1 menunjukkan graf tak terarah yang tidak lengkap mengaitkan enam tempat tersebut.
 - Lengkapkan Rajah 1 dengan melukis satu graf tak terarah dan berpemberat.
 - Lukis satu pokok berpemberat minimum dengan keadaan setiap tempat hanya dilalui sekali sahaja.
 - Berapakah jarak minimum pokok yang anda lukis?
- Jadual di bawah menunjukkan empat jenis makanan kegemaran beberapa orang murid.

Makanan	Nama murid
Nasi ayam	Mervin, Raj, Helen, Wong, Ain
Nasi lemak	Mervin, Nurul, Atiqah, Ain, Puspa
Nasi goreng	Helen, Julia, Nurul, Faruk, Puspa
Mi goreng	Faruk, Atiqah, Raj, Wong, Julia

- Lukis satu graf berbilang tepi berdasarkan jadual di atas.
 - Antara jenis makanan dengan nama murid, kumpulan manakah yang anda pilih untuk mewakili bucu? Berikan justifikasi anda.
 - Apakah kaitan antara jumlah darjah bagi graf yang anda lukis dengan jumlah keseluruhan pilihan makanan?
 - Antara grafik berbentuk jadual dengan graf, yang manakah jelas menunjukkan perkaitan antara jenis makanan dengan murid?
- Lukis carta organisasi kelas mengikut kreativiti anda.
 - Nyatakan jenis graf yang anda gunakan. Adakah carta organisasi suatu rangkaian? Berikan justifikasi anda.

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan rangkaian?

Contoh 16



Menyelesaikan masalah yang melibatkan rangkaian.

Jadual di bawah menunjukkan pilihan pengangkutan awam, anggaran masa perjalanan dan anggaran kos dari Johor Bahru ke Kota Bharu.

Jenis pengangkutan	Masa perjalanan (sistem 24 jam)	Anggaran tempoh perjalanan	Anggaran perbelanjaan
			Harga tiket seorang / kos bahan api
Bas	Jam 2000	9 jam	RM64 - RM75
Kereta api	Jam (1833 - 1147)	17 jam	Kemudahan tempat tidur Kanak-kanak: RM32 - RM38 Dewasa: RM49 - RM55 Tanpa kemudahan tempat tidur Kanak-kanak: RM26 Dewasa: RM43
Kereta	-	9 jam	RM120 (untuk sebuah kereta)

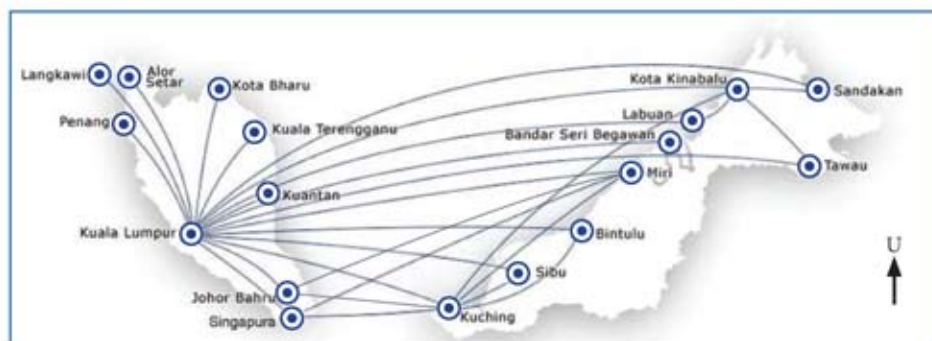
Berdasarkan jadual di atas, tentukan jenis pengangkutan yang harus dipilih dalam situasi yang diberikan di bawah. Berikan justifikasi anda.

- Perjalanan yang melibatkan seorang dewasa tanpa kekangan masa.
- Perjalanan yang melibatkan seorang dewasa dengan kekangan masa.
- Perjalanan yang melibatkan dua orang dewasa dan dua orang kanak-kanak.

Penyelesaian:

Jenis pengangkutan	Harga tiket seorang (RM)	
	Minimum	Maksimum
Bas	64	75
Kereta api (Kemudahan tempat tidur)	Kanak-kanak = 32 Dewasa = 49	Kanak-kanak = 38 Dewasa = 55
Kereta api (Tanpa kemudahan tempat tidur)	Kanak-kanak = 26 Dewasa = 44	-

- Kereta api dengan kemudahan tempat tidur ialah pilihan terbaik kerana kos perjalanan hanya beza RM5 berbanding dengan kereta api tanpa kemudahan tempat tidur. Pilihan ini juga lebih murah daripada perbelanjaan dengan memandu kereta.
- Bas merupakan pilihan terbaik kerana lebih jimat dan penumpang boleh berehat sepanjang perjalanan. Perjalanan jauh bagi seorang individu menggunakan kereta bukan satu pilihan bijak dari aspek keselamatan.
- Kereta ialah pilihan yang paling menjimatkan.

Contoh 17

Peta di atas menunjukkan laluan penerbangan domestik oleh sebuah syarikat penerbangan swasta di Malaysia.

- Encik Joshua bekerja di Kuala Lumpur. Beliau ingin melawat keluarganya di Kota Kinabalu. Nyatakan laluan penerbangan terbaik yang boleh dipilih oleh Encik Joshua.
- Apakah kelebihan dan kekurangan bagi pilihan penerbangan pada jawapan (a)?

Penyelesaian:

- Penerbangan terus dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu atau dari Kuala Lumpur ke Labuan dan seterusnya ke Kota Kinabalu.
- Penerbangan terus dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu boleh menjimatkan masa dan kos perjalanan. Penerbangan dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu melalui Labuan akan mengambil masa perjalanan yang lebih panjang dan kemungkinan kos perjalanan juga lebih tinggi.

**Praktis Kendiri 5.1e**

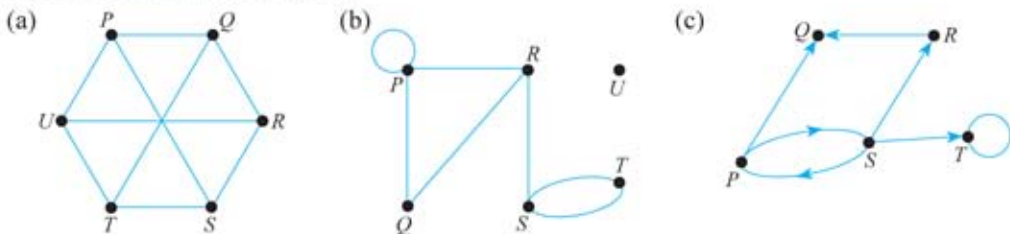
- Encik Maswi bekerja di Kulai. Beliau ingin melawat keluarganya di Miri pada suatu hujung minggu tertentu. Pada hari Jumaat, waktu bekerja Encik Maswi akan tamat pada pukul 12:30 tengah hari. Jadual di bawah menunjukkan pilihan laluan penerbangan domestik pada hari Jumaat dan hari Sabtu minggu tersebut oleh sebuah syarikat penerbangan swasta di Malaysia.

Laluan	Jumaat		Sabtu	
	Masa	Harga tiket	Masa	Harga tiket
Johor Bahru - Miri	Tiada penerbangan		Jam (1705 – 1900)	RM259.30
Johor Bahru - Kuching	Jam (1630 – 1755)	RM144.30	Jam (0605 – 0730)	RM174.30
	Jam (1930 – 2055)	RM124.30	Jam (1205 – 1330)	RM154.30
Kuching - Miri	Jam (2010 – 2115)	RM149.00	Jam (0835 – 0940)	RM84.00
	Jam (2155 – 2300)	RM149.00	Jam (1145 – 1250)	RM64.00

- Tentukan penerbangan yang paling murah dari Johor Bahru ke Miri.
- Tentukan pilihan penerbangan terbaik dari Johor Bahru ke Miri yang harus dipilih oleh Encik Maswi jika beliau perlu balik ke Semenanjung Malaysia pada hari Ahad. Berikan justifikasi anda.

Praktis Komprehensif

1. Diberi tiga graf seperti di bawah.



Untuk setiap graf, tentukan

- (i) set V (ii) set E (iii) bilangan darjah

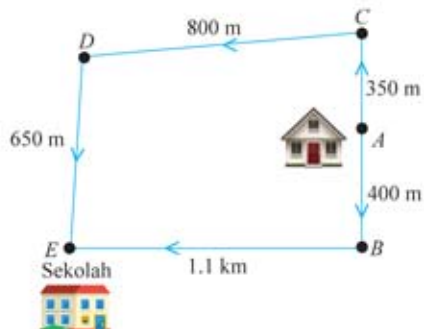
2. Lukis graf tak terarah berdasarkan maklumat yang diberikan.

- (a) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
 $E = \{(P, Q), (Q, R), (R, S), (S, T)\}$
 (b) $V = \{P, Q, R, S, T\}$
 $E = \{(P, Q), (P, Q), (Q, R), (Q, T), (R, S), (S, S), (S, T)\}$

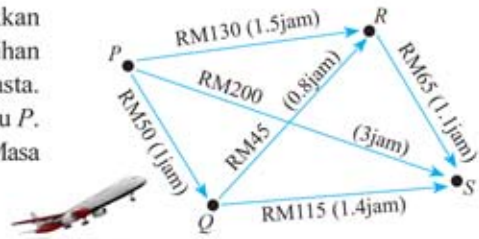
3. (a) Lukis satu graf tak terarah dan berpemberat mewakili jalan persekutuan yang menghubungkan beberapa buah bandar seperti dalam jadual di sebelah. Anda digalakkan menggunakan peta kawasan untuk menentukan kedudukan bandar-bandar yang diberikan.
 (b) Adakah graf yang anda lukis merupakan pokok? Berikan justifikasi anda.

Nama bandar	Jarak (km)
Temerloh – Mentakab	9.3
Temerloh – Bandar Bera	30.2
Bandar Bera – Teriang	4.9
Mentakab – Lanchang	21.1
Lanchang – Karak	21.9
Mentakab – Kuala Krau	34.6

4. Rajah di sebelah menunjukkan graf terarah dari rumah Lani di A , ke sekolah di E . Diberi tepi BE ialah jalan perbandaran dan tepi AB, AC, CD serta DE ialah jalan dalam kawasan perumahan. Cadangkan laluan terbaik yang boleh dipilih oleh Lani untuk ke sekolah dengan basikal. Berikan justifikasi anda.

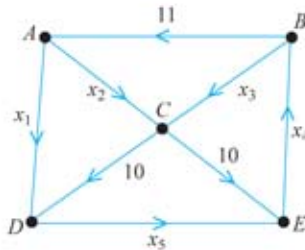


5. Graf terarah dan berpemberat di sebelah menunjukkan bayaran tiket dan masa perjalanan bagi pilihan penerbangan oleh suatu syarikat penerbangan swasta. Diberi bucu S ialah destinasi yang ditujui dari bucu P . Bucu Q dan bucu R ialah lapangan terbang transit. Masa transit di setiap lapang terbang ialah 45 minit.



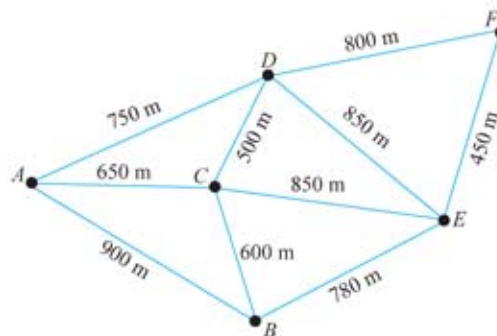
- (a) Nyatakan,
- laluhan yang paling murah.
 - laluhan yang mengambil masa perjalanan yang paling singkat.
- (b) Jika anda perlu ke destinasi dengan kos yang optimum, nyatakan laluhan yang anda pilih. Berikan justifikasi anda.

6. Bina empat persamaan linear berdasarkan graf terarah di bawah. Diberi $x_5 = 15$. Tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4 .



Guna, $\sum d_{in} = \sum d_{out}$ bagi setiap bucu.

7. Graf tak terarah di bawah menunjukkan kedudukan enam buah rumah di sebuah kampung. Seorang jurujual perlu ke semua rumah tersebut bermula dari rumah A dan berakhir di rumah F .

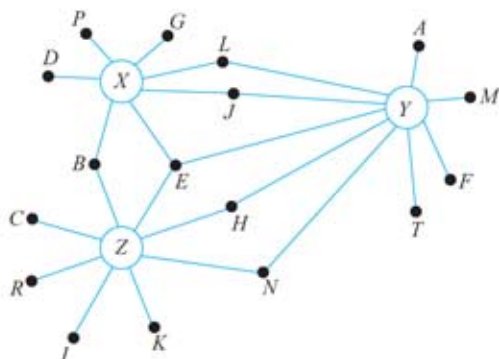


- (a) Lukis satu graf terarah mewakili jarak terpendek dari A ke F dengan syarat semua laluhan hanya dilalui sekali sahaja.
- (b) Hitung jarak terpendek dalam km, berdasarkan graf yang anda lukis.

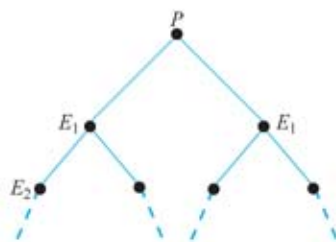


8. Graf di sebelah menunjukkan kaitan antara unsur-unsur yang terdapat dalam set X , set Y dan set Z , dengan keadaan set semesta, $\xi = X \cup Y \cup Z$.

- (a) Wakilkan graf di sebelah dalam bentuk gambar rajah Venn.
(b) Tentukan,
(i) $(X \cup Y)'$
(ii) $(X \cap Z)' \cap Y'$
(iii) $(Y \cap Z) \cap (X \cap Y)$



9. Encik Ganesan berjawatan sebagai pengurus sebuah agensi insurans. Beliau berjaya menyediakan dua orang ejen insurans yang aktif di bawah pimpinannya untuk menjual suatu skim insurans terkini, yang bernilai RM100 sebulan. Selain menjual polisi insurans, ejen-ejen tersebut juga perlu memperkenalkan minimum dua ejen baharu setiap seorang untuk tujuan kenaikan pangkat. Pada rajah pokok yang tidak lengkap di sebelah, bucu P mewakili pengurus, E_1 sebagai ejen peringkat pertama, E_2 sebagai ejen peringkat kedua dan seterusnya.



- (a) Jika terdapat 30 orang ejen pada bulan Januari, lengkapkan pokok yang diberikan.
(b) Jadual di sebelah menunjukkan peratus komisen asas yang diterima oleh seorang ejen dan pengurus apabila satu polisi insurans berjaya dijual.

Ejen	25%
Pengurus	2%

- (i) Hitung jumlah komisen asas yang diterima oleh Encik Ganesan pada bulan Januari, jika minimum polisi yang dijual oleh seorang ejen pada bulan Januari ialah 18 polisi.
(ii) Berapakah minimum polisi yang perlu dijual oleh seorang ejen agar komisen asas yang diterima adalah sekurang-kurangnya RM1 000?



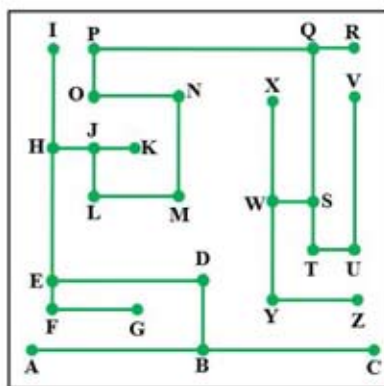
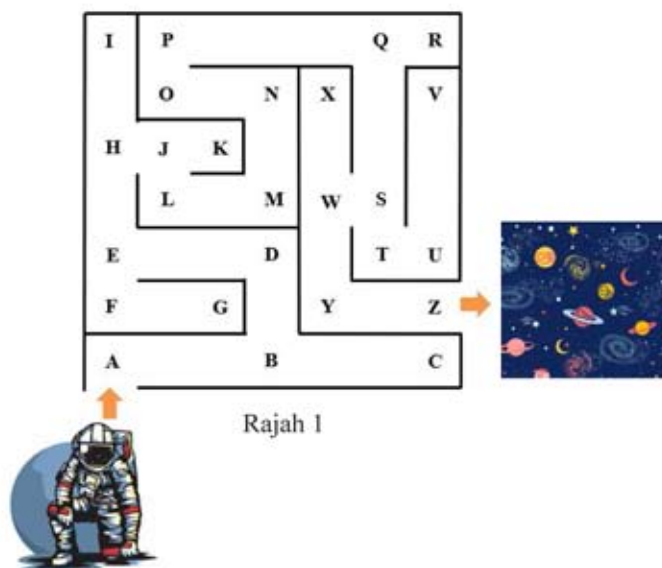
10. Rajah di sebelah menunjukkan pertumbuhan sejenis sel. Diberi bahawa pada hari pertama terdapat empat sel. Pada hari kedua setiap sel membina tiga sel baharu. Proses pembinaan sel baharu ini berulang dengan kadar yang sama.

- (a) Pada hari keberapakah jumlah sel melebihi 50 untuk kali pertama?
(b) Hitung jumlah sel pada hari kelima.
(c) Diberi jangka hayat sel ialah 5 hari. Hitung jumlah sel pada hari kelapan.



PROJEK

1. Permainan pagar sesat atau dikenali sebagai *Maze* merupakan satu contoh rangkaian. Rajah 1 menunjukkan contoh *Maze* sementara Rajah 2 ialah rangkaian yang sepadan.



2. Bahagikan kelas kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
3. Dapatkan contoh permainan *Maze* pelbagai aras.
4. Labelkan bucu-bucu dengan tatatanda yang sesuai seperti pada Rajah 1.
5. Lukiskan rangkaian yang sepadan.
6. Pamerkan hasil projek anda di Sudut Matematik.



Rangkaian dalam Teori Graf

Graf

Mudah



Darjah

Mempunyai gelung dan berbilang tepi



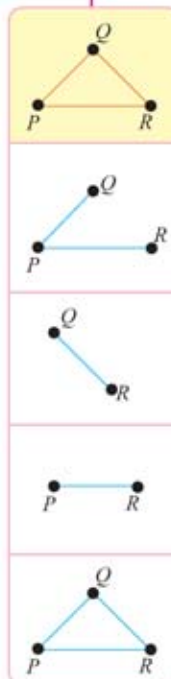
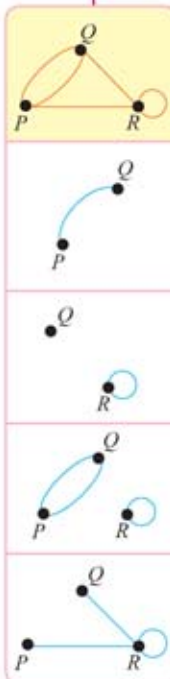
Graf tak terarah



Graf terarah



Subgraf



Graf berpemberat



Graf tak berpemberat



Pokok (Graf mudah)



Refleksi Kendiri

Lengkapkan pernyataan yang diberi dengan jawapan yang disediakan.

subgraf

graf berpemberat

darjah

graf mudah

graf terarah

tepi

pokok

gelung

1. ialah garis yang mengaitkan dua bucu.
2. ialah bilangan tepi yang mengaitkan dua bucu.
3. Graf tanpa dan tanpa berbilang tepi dikenali sebagai .
4. Tepi ditanda dengan arah.
5. Tepi ditanda dengan suatu nilai atau maklumat.
6. ialah sebahagian atau keseluruhan graf yang dilukis semula.
7. Setiap pasangan bucu pada suatu hanya dikaitkan dengan satu tepi.



Eksplorasi Matematik

Dapatkan maklumat dan sediakan satu persembahan multimedia berkaitan salah satu rangkaian di bawah.



Sosial



Perubatan



Perbankan



Bahasa



Sains Komputer

Sertakan gambar, video atau bahan menarik agar persembahan anda lebih kreatif dan informatif.