

BAB 5

TABURAN KEBARANGKALIAN



Apakah yang akan dipelajari?

- Pemboleh Ubah Rawak
- Taburan Binomial
- Taburan Normal

Senarai
Standard
Pembelajaran



bit.ly/374RxTk

Malaysia mencipta sejarah apabila pemanah yang mewakili negara kita berjaya melayakkan diri ke peringkat akhir dalam Kejohanan Memanah Piala Asia 2019. Dalam pertandingan itu, seorang pemanah mesti memanah sebanyak 72 anak panah dalam 12 fasa dari jarak 70 meter. Masa yang diberikan untuk memanah tiga anak panah ialah dua minit manakala masa yang diberikan untuk menamatkan enam anak panah ialah empat minit. Pada pendapat anda, berapakah kebarangkalian yang mungkin bagi panahan itu? Adakah panahan itu bergantung kepada panahan sebelumnya?

Sudut • Maklumat

Girolamo Cardano (1501-1576) merupakan orang pertama yang mengkaji lambungan dadu. Beliau telah menulis senaskhah buku yang mengandungi konsep kebarangkalian yang sistematik dan lengkap.

Pada abad ke-17, dua orang ahli matematik Perancis, iaitu Blaise Pascal dan Pierre de Fermat mengasaskan teori kebarangkalian.

Untuk maklumat lanjut:



bit.ly/3hwGVkR



Kepentingan Bab Ini

- Pengetahuan tentang kebarangkalian memainkan peranan penting dalam sektor pembuatan.
- Proses ini dilakukan dengan hanya menguji beberapa sampel daripada setiap kumpulan beribu-ribu produk agar melepasi ujian kualiti dan tidak memerlukan kos yang tinggi.

Kata Kunci

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| ● Pemboleh ubah rawak | <i>Random variable</i> |
| ● Pemboleh ubah rawak diskret | <i>Discrete random variable</i> |
| ● Pemboleh ubah rawak selanjur | <i>Continuous random variable</i> |
| ● Taburan binomial | <i>Binomial distribution</i> |
| ● Taburan normal | <i>Normal distribution</i> |
| ● Min | <i>Mean</i> |
| ● Varians | <i>Variance</i> |
| ● Sisihan piawai | <i>Standard deviation</i> |

Video mengenai
pemanah
Malaysia



bit.ly/2PQs0aG

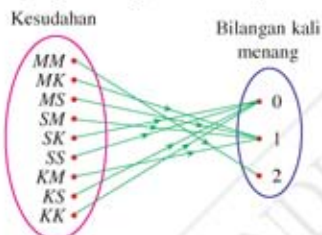
5.1 Pemboleh Ubah Rawak



Pemboleh ubah rawak

Dalam suatu pertandingan bola keranjang, keputusan dua permainan boleh direkodkan sebagai menang (M), kalah (K) atau seri (S). Dalam hal ini, ruang sampel boleh ditulis sebagai $\{MM, MK, MS, SM, SK, SS, KM, KS, KK\}$. Jika kita hanya mengambil kira dua permainan yang memperoleh kemenangan, maka bilangan kali yang menang terdiri daripada tiada satu pun menang (0), satu kali menang (1) dan dua kali menang (2).

Gambar rajah anak panah di bawah menunjukkan hubungan antara semua kesudahan dalam ruang sampel dengan bilangan kali pasukan bola keranjang menang dalam dua permainan tersebut.



Nombor 0, 1 dan 2 dalam gambar rajah anak panah di atas mewakili bilangan kali menang bagi setiap kesudahan. Set $\{0, 1, 2\}$ ini ialah contoh **pemboleh ubah rawak** kerana nilainya tidak boleh ditentukan terlebih dahulu dan bergantung kepada peluang.

Secara amnya,

Pemboleh ubah rawak ialah suatu pemboleh ubah dengan nilai berangka yang ditentukan daripada suatu fenomena rawak.

Pemboleh ubah rawak boleh diwakilkan dengan X dan nilai-nilai pemboleh ubah rawak tersebut boleh diwakilkan dengan r . Daripada situasi di atas, pemboleh ubah rawak X bagi bilangan kali menang boleh ditulis dalam tatatanda set, iaitu $X = \{0, 1, 2\}$.



Imbas Kembali

Ruang sampel ialah satu set yang terdiri daripada semua kesudahan yang mungkin bagi suatu eksperimen.



PERBINCANGAN

Adakah jisim bagi 40 orang murid di dalam sebuah kelas merupakan suatu pemboleh ubah rawak? Jelaskan.

Contoh 1

Nyatakan pemboleh ubah rawak bagi setiap situasi yang berikut.

- Sebiji dadu dilambungkan sekali.
- Seorang lelaki menunggu bas di sebuah perhentian bas.



Penyelesaian

- Pemboleh ubah rawak ialah nombor pada permukaan atas dadu, iaitu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pemboleh ubah rawak ialah tempoh masa menunggu di sebuah perhentian bas.

Latihan Kendiri 5.1

1. Nyatakan pemboleh ubah rawak bagi setiap situasi yang berikut dalam tatatanda set.
 - (a) Keputusan bagi pertandingan bola sepak pasukan Malaysia dalam sukan SEA.
 - (b) Bilangan kereta berwarna putih di antara lima buah kereta di tempat letak kereta.
 - (c) Bilangan kali memperoleh gambar jika sekeping duit syiling dilambungkan tiga kali.
2. Sebiji bola dikeluarkan dari sebuah kotak yang mengandungi beberapa biji bola merah dan bola biru. Selepas warna bola dicatatkan, bola itu dikembalikan semula ke dalam kotak dan proses ini diulang sebanyak empat kali. Jika X mewakili bilangan kali mendapat bola merah dari kotak itu, senaraikan semua kesudahan yang mungkin bagi X dalam tatatanda set.



Pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selangar

Terdapat dua jenis pemboleh ubah rawak yang akan dipelajari, iaitu pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selangar. Pemboleh ubah rawak diskret mempunyai nilai yang boleh dibilang manakala pemboleh ubah rawak selangar mengambil semua nilai dalam suatu selang tertentu. Mari teroka perbezaan antara kedua-dua pemboleh ubah rawak ini.

Aktiviti Penerokaan

1

Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membanding dan membeza pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selangar

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada dua kumpulan. Kumpulan pertama akan melakukan Aktiviti 1 yang berkaitan dengan pemboleh ubah rawak diskret. Kumpulan kedua akan melakukan Aktiviti 2 yang berkaitan dengan pemboleh ubah rawak selangar.

Aktiviti 1

1. Sediakan sekeping duit syiling.
2. Lambungkan duit syiling itu tiga kali berturut-turut.
3. Catatkan sama ada anda memperoleh gambar (G) atau angka (A) bagi setiap lambungan.
4. Ulang langkah 2 dan 3.
5. Kemudian, tulis semua nilai yang mungkin bagi pemboleh ubah rawak X yang mewakili bilangan kali gambar yang diperoleh dalam tiga lambungan itu.

Aktiviti 2

1. Ukur ketinggian (dalam cm) semua murid di dalam kelas.
2. Catatkan hasil dapatan anda pada sehelai kertas.
3. Kemudian, tulis julat nilai yang mungkin bagi pemboleh ubah rawak Y yang mewakili ketinggian murid yang diperoleh.

2. Kemudian, bandingkan hasil dapatan kedua-dua kumpulan.
3. Apakah yang dapat anda katakan mengenai nilai pemboleh ubah rawak dan perwakilan pemboleh ubah rawak itu dalam tatatanda set antara pemboleh ubah rawak diskret dengan pemboleh ubah rawak selangar? Jelaskan.
4. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dengan menjelaskan perbandingan antara pemboleh ubah rawak diskret dengan pemboleh ubah rawak selangar.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa:

- Pemboleh ubah rawak yang mempunyai bilangan nilai yang boleh dibilang dan selalu dalam bentuk sifar dan integer positif dikenali sebagai **pemboleh ubah rawak diskret**.
- Pemboleh ubah rawak yang bukan dalam bentuk integer dan nilainya berada dalam suatu selang dikenali sebagai **pemboleh ubah rawak selangar**.

Jika X mewakili pemboleh ubah rawak diskret, maka kesudahan yang mungkin boleh ditulis dalam bentuk tatatanda set, $X = \{x : x = 0, 1, 2, 3\}$.

Jika pemboleh ubah rawak selangar diwakili oleh Y , maka kesudahan yang mungkin boleh ditulis dalam bentuk $Y = \{y : y \text{ ialah tinggi murid dalam cm, } a \leq y \leq b\}$.

Contoh 2

Tuliskan semua kesudahan yang mungkin dalam bentuk tatatanda set bagi setiap peristiwa yang berikut. Tentukan sama ada peristiwa tersebut ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selangar. Jelaskan.

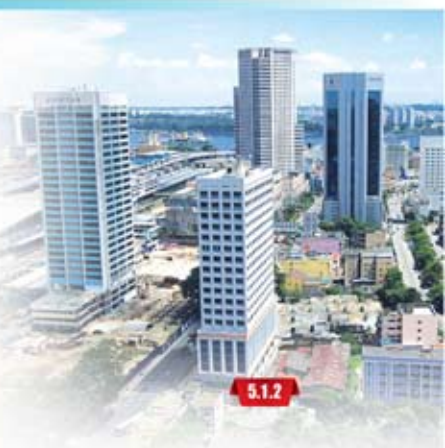
- (a) Sebiji dadu adil dilambungkan sebanyak tiga kali. Diberi X ialah pemboleh ubah rawak yang mewakili bilangan kali mendapat nombor 4.
- (b) X ialah pemboleh ubah rawak yang mewakili masa yang diambil oleh seorang murid menunggu bas di sebuah perhentian bas. Julat masa yang diambil oleh seorang murid adalah antara 5 minit hingga 55 minit.

Penyelesaian

- (a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Peristiwa ini ialah pemboleh ubah rawak diskret kerana nilai pemboleh ubah rawak yang diperoleh boleh dibilang.
- (b) $X = \{x : x \text{ ialah masa dalam minit, } 5 \leq x \leq 55\}$. Peristiwa ini ialah pemboleh ubah rawak selangar kerana nilai pemboleh ubah rawak berada dalam selang masa antara 5 minit hingga 55 minit.

Latihan Kendiri 5.2

1. Tuliskan semua kesudahan yang mungkin dalam bentuk tatatanda set bagi setiap peristiwa yang berikut. Tentukan sama ada peristiwa tersebut ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selangar.
 - (a) Enam orang pengawas dipilih secara rawak daripada murid-murid Tingkatan 5. X mewakili bilangan pengawas yang memakai cermin mata.
 - (b) Tujuh orang pesakit dipilih secara rawak dari sebuah hospital untuk melakukan ujian darah. X mewakili bilangan pesakit yang kurang berkemampuan.
 - (c) Bangunan yang paling rendah di bandar Seroja ialah 3 m dan yang paling tinggi ialah 460 m. X mewakili tinggi bangunan yang terdapat di bandar Seroja.





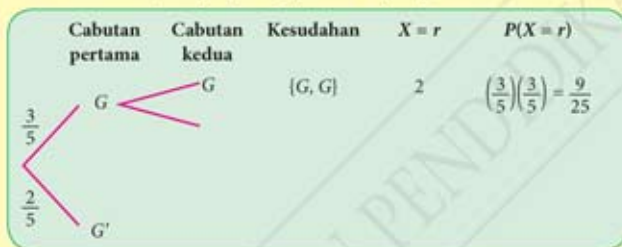
Taburan kebarangkalian pemboleh ubah rawak diskret

Aktiviti Penerokaan 2 Berpasangan

Tujuan: Menerangkan maksud taburan kebarangkalian pemboleh ubah rawak diskret X melalui gambar rajah pokok

Langkah:

1. Sediakan lima keping kertas bersaiz segi empat sama dan tuliskan nombor 1 hingga 5 di atas setiap keping kertas itu.
2. Masukkan lima keping kertas itu di dalam sebuah kotak kecil.
3. Keluarkan sekeping kertas dari kotak itu secara rawak dan catatkan nombor yang terdapat pada kepingan kertas. Kemudian, kembalikan kertas ke dalam kotak sebelum sekeping kertas lagi diambil dari kotak itu. Proses ini diulang sebanyak 2 kali.
4. Katakan X mewakili bilangan kali mendapat nombor ganjil. Tuliskan
 - (a) semua kesudahan yang mungkin bagi X dalam dua cabutan itu,
 - (b) kebarangkalian mendapat nombor ganjil bagi setiap cabutan.
5. Kemudian, lengkapkan gambar rajah pokok di bawah.



6. Daripada gambar rajah pokok yang diperolehi, cari
 - (a) kebarangkalian bagi setiap nilai X ,
 - (b) jumlah kebarangkaliannya.
7. Buat satu kesimpulan tentang nilai kebarangkalian pemboleh ubah rawak X dan jumlah kebarangkalian bagi taburan ini.



Imbas Kembali

- Kebarangkalian peristiwa A berlaku, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ dengan keadaan $n(A)$ ialah bilangan kesudahan bagi peristiwa A dan $n(S)$ ialah bilangan kesudahan bagi ruang sampel S .
- Kebarangkalian peristiwa A berlaku adalah antara 0 hingga 1, iaitu $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Jika A' ialah pelengkap bagi peristiwa A , maka $P(A') = 1 - P(A)$.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 2, nilai yang mungkin bagi X ialah 0, 1 dan 2. Setiap nombor ini mewakili satu peristiwa dalam ruang sampel $\{(G, G), (G, G'), (G', G), (G', G')\}$. Kebarangkalian setiap peristiwa boleh diringkaskan dalam bentuk jadual taburan kebarangkalian X seperti yang ditunjukkan dalam jadual di sebelah. Secara amnya,

$X = r$	0	1	2
$P(X = r)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

Jika X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan nilai $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ dan kebarangkalian masing-masing ialah $P(X = r_1), P(X = r_2), P(X = r_3), \dots, P(X = r_n)$, maka $\sum_{i=1}^n P(X = r_i) = 1$, dengan keadaan setiap $P(X = r_i) \geq 0$.

Dua biji dadu adil dilambungkan serentak sebanyak tiga kali. Katakan X ialah pemboleh ubah rawak diskret untuk mendapat 7 daripada hasil tambah dadu pertama dan dadu kedua.



- Tuliskan nilai X dalam bentuk tatatanda set.
- Lukis gambar rajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin bagi X .
- Daripada gambar rajah pokok di (b), kira kebarangkalian bagi setiap nilai X yang mungkin.
- Tentukan jumlah taburan kebarangkalian bagi X .

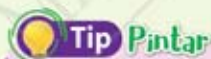
Penyelesaian

- $X = \{0, 1, 2, 3\}$

- Katakan R ialah mendapat hasil tambah 7 dan T ialah mendapat hasil tambah bukan 7.

Dadu pertama

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

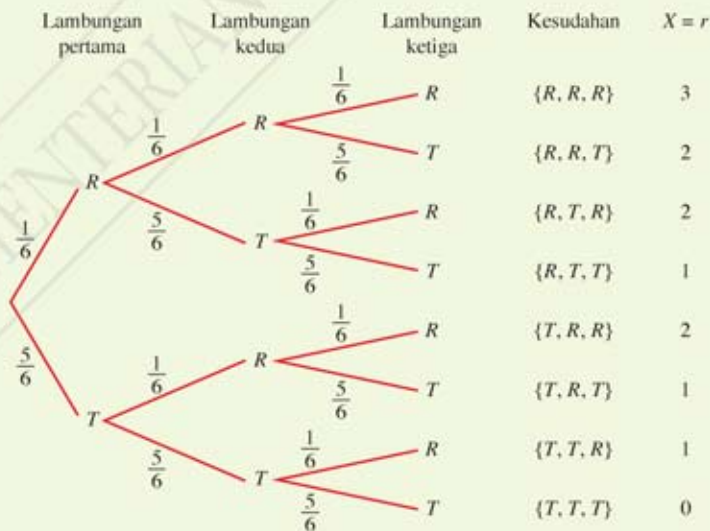


Dengan menggunakan petua pendaraban,
 ${}^6C_1 \times {}^6C_1 = 36$

Maka, bilangan kesudahan dalam ruang sampel, $n(S)$ bagi Contoh 3 ialah 36.

Daripada jadual di atas, kebarangkalian mendapat hasil tambah 7 dalam setiap percubaan ialah

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$



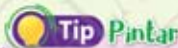
$$\begin{aligned}
 (c) \quad P(X=0) &= P(T, T, T) \\
 &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\
 &= \frac{125}{216} \\
 &= 0.5787
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=2) &= P(R, R, T) + P(R, T, R) + P(T, R, R) \\
 &= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \\
 &= \frac{15}{216} \\
 &= 0.0695
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=3) &= P(R, R, R) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{216} \\
 &= 0.0046
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \text{ Jumlah kebarangkalian} &= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=1) &= P(R, T, T) + P(T, R, T) + P(T, T, R) \\
 &= \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) \\
 &= \frac{75}{216} \\
 &= 0.3472
 \end{aligned}$$



Dalam Contoh 3,

$$\begin{aligned}
 P(X=1) &= {}^3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\
 &= 0.3472
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=2) &= {}^3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\
 &= 0.0695
 \end{aligned}$$

Latihan Kendiri 5.3

- Dalam sebuah dewan mini, terdapat tiga suis untuk menghidupkan tiga buah kipas. X mewakili bilangan suis yang dihidupkan dalam satu masa.
 - Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.
 - Lukis gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin dan cari kebarangkalian masing-masing.
 - Tentukan jumlah taburan kebarangkalian bagi X .
- Pada tahun 2016, didapati bahawa 38% kereta yang dibeli oleh sebahagian rakyat Malaysia berwarna putih. Jika dua orang pembeli dipilih secara rawak dan X mewakili bilangan pembeli kereta putih,
 - nyatakan set X ,
 - lukis gambar rajah pokok dan tentukan taburan kebarangkalian bagi X .
- Sekeping duit syiling dilambungkan sebanyak tiga kali dan X mewakili bilangan kali mendapat gambar.
 - Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.
 - Lukis gambar rajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin bagi X .
 - Tunjukkan bahawa X ialah pemboleh ubah rawak diskret.





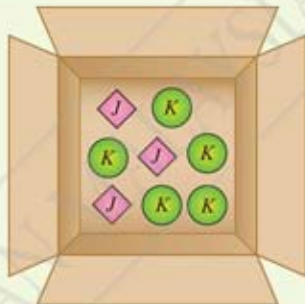
Selain gambar rajah pokok, taburan kebarangkalian setiap pemboleh ubah rawak diskret X boleh diwakilkan dengan jadual dan graf. Jadual dan graf akan memaparkan nilai pemboleh ubah rawak yang mungkin berserta kebarangkalian yang sepadan bagi setiap satu.

Contoh

4

Di sebuah kilang, seorang penyelia ingin memeriksa kualiti suatu jenis produk secara rawak. Terdapat 3 buah produk J dan 5 buah produk K di dalam sebuah kotak. Penyelia itu akan mengambil satu produk secara rawak dan jenis produk akan dicatatkan. Produk tersebut akan dimasukkan semula ke dalam kotak dan proses pemeriksaan kualiti produk ini akan dilakukan sebanyak tiga kali. Katakan X mewakili bilangan kali produk K diperiksa.

- Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.
- Lukis satu gambar rajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin bagi X .
- Senaraikan taburan nilai X serta kebarangkalian masing-masing dalam satu jadual dan seterusnya lukis satu graf untuk mewakili taburan kebarangkalian X .



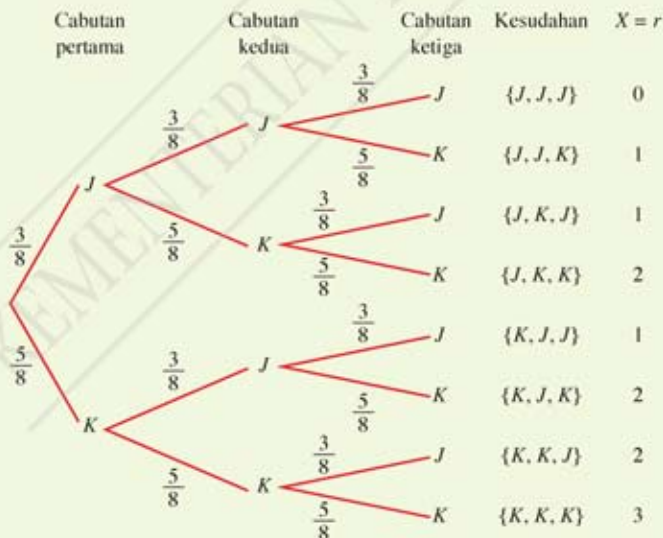
Tip Pintar

Produk kedua atau ketiga yang dipilih tidak bergantung kepada jenis produk yang dipilih sebelumnya kerana produk telah dikembalikan ke dalam kotak. Peristiwa ini adalah tidak bersandar.

Penyelesaian

- (a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

- (b)



Kuiz Pantas

Jika produk pertama yang dipilih tidak dikembalikan ke dalam kotak, adakah kebarangkalian mendapat sebuah produk selepas itu masih sama? Jika tidak, cari kebarangkalian bagi cabutan kedua dan ketiga untuk mendapat produk K .

(c) $P(X = 0)$

$$\begin{aligned}
 &= P(J, J, J) \\
 &= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \\
 &= \frac{27}{512} \\
 &= 0.0527
 \end{aligned}$$

$P(X = 1)$

$$\begin{aligned}
 &= P(J, J, K) + P(J, K, J) + P(K, J, J) \\
 &= \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right) \\
 &= \frac{135}{512} \\
 &= 0.2637
 \end{aligned}$$

$P(X = 2)$

$$\begin{aligned}
 &= P(J, K, K) + P(K, J, K) + P(K, K, J) \\
 &= \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}\right) \\
 &= \frac{225}{512} \\
 &= 0.4395
 \end{aligned}$$

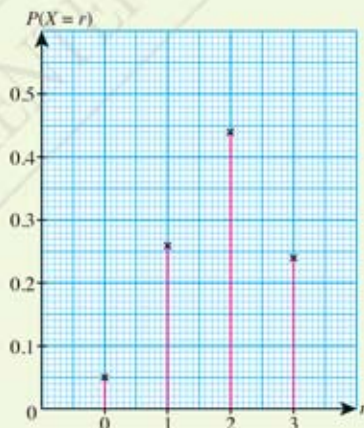
$P(X = 3)$

$$\begin{aligned}
 &= P(K, K, K) \\
 &= \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \\
 &= \frac{125}{512} \\
 &= 0.2441
 \end{aligned}$$

Wakikan taburan kebarangkalian yang mungkin bagi X dalam bentuk jadual:

$X = r$	0	1	2	3
$P(X = r)$	0.0527	0.2637	0.4395	0.2441

Wakikan taburan kebarangkalian yang mungkin bagi X dalam bentuk graf $P(X = r)$ melawan r :



Kaedah Alternatif

Untuk $P(X = 1)$, peristiwa memperoleh produk K boleh berlaku pada cabutan pertama, kedua atau ketiga. Jadi, konsep gabungan boleh digunakan.

$$\begin{aligned}
 {}^3C_1 \left(\frac{5}{8}\right)^1 \left(\frac{3}{8}\right)^2 &= 3 \left(\frac{5}{8}\right) \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\
 &= \frac{135}{512} \\
 &= 0.2637
 \end{aligned}$$

Kuiz Pantas

Menggunakan konsep gabungan, cari

- (a) $P(X = 0)$
 (b) $P(X = 2)$
 (c) $P(X = 3)$

Kuiz Pantas

Daripada jadual dan graf dalam Contoh 4, berapakah jumlah taburan kebarangkalian bagi X ?

70% daripada murid Tingkatan 5 Dahlia memperoleh gred A dalam ujian akhir tahun bagi mata pelajaran Sains. Dua orang murid dipilih secara rawak daripada murid-murid kelas itu. Jika X mewakili bilangan murid yang tidak mendapat gred A, bina jadual untuk menunjukkan nilai yang mungkin bagi X dengan taburan kebarangkalian masing-masing. Seterusnya, lukis satu graf yang menunjukkan taburan kebarangkalian X .

Penyelesaian

$$P(A : A \text{ ialah murid yang tidak mendapat gred A}) = 1 - \frac{70}{100} = 0.3$$

$$P(B : B \text{ ialah murid yang mendapat gred A}) = \frac{70}{100} = 0.7$$

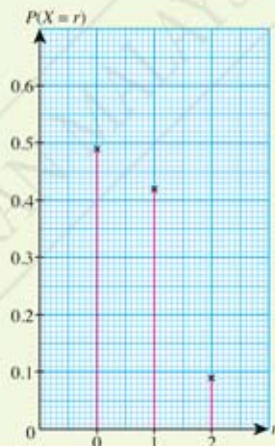
$$\text{Jadi, } X = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(B, B) \\ &= 0.7 \times 0.7 \\ &= 0.49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A, B) + P(B, A) \\ &= (0.3 \times 0.7) + (0.7 \times 0.3) \\ &= 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A, A) \\ &= 0.3 \times 0.3 \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

$X = r$	0	1	2
$P(X = r)$	0.49	0.42	0.09



Latihan Kendiri 5.4

- 6 daripada 10 orang murid yang dipilih secara rawak menyertai kem kepimpinan peringkat daerah. Jika 5 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan murid itu dan X mewakili bilangan murid yang menyertai kem kepimpinan itu, lukis satu graf untuk mewakili taburan kebarangkalian X .
- Didapati bahawa 59% daripada calon peperiksaan kemasukan ke sekolah berasrama penuh lulus dalam semua mata pelajaran. 4 orang murid dipilih secara rawak daripada kesemua calon dan X mewakili bilangan murid yang lulus dalam semua mata pelajaran mereka.
 - Bina satu jadual taburan kebarangkalian bagi X .
 - Seterusnya, lukis graf taburan kebarangkalian bagi X .
- Terdapat 2 biji bola keranjang dan 4 biji bola sepak di dalam sebuah kotak. 4 biji bola dikeluarkan secara rawak dari kotak itu satu demi satu dan bola dikembalikan semula selepas jenis bola dicatatkan. Jika X mewakili bilangan bola keranjang yang dikeluarkan dari kotak itu, lukis graf taburan kebarangkalian bagi X .

Latihan Formatif

5.1

Kuiz

bit.ly/2SmNJbZ



- Satu kumpulan debat sekolah terdiri daripada 6 orang ahli dengan 2 daripada ahli kumpulan itu ialah lelaki. 2 orang ahli kumpulan debat itu dipilih secara rawak untuk menyertai suatu pertandingan dan X mewakili bilangan ahli kumpulan lelaki.
 - Senaraikan semua nilai yang mungkin bagi X .
 - Nyatakan sama ada X ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar.

- Didapati bahawa paku terpanjang yang dihasilkan oleh sebuah kilang ialah 10.2 cm dan paku terpendek ialah 1.2 cm. Jika X mewakili pemboleh ubah rawak bagi panjang paku yang dihasilkan oleh kilang itu,
 - senaraikan semua nilai yang mungkin bagi X ,
 - nyatakan sama ada X ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar.



- Diberi $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret yang mewakili bilangan komputer di sebuah pejabat dengan nilai bagi fungsi kebarangkalian masing-masing ditunjukkan dalam jadual di bawah.

$X = r$	0	1	2	3
$P(X = r)$	0.2	0.35	0.3	0.15

- Tunjukkan bahawa X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan fungsi kebarangkalian $P(X = r)$.
 - Lukis graf taburan kebarangkalian bagi X .
- Sebuah kotak mengandungi beberapa biji bola pingpong. Setiap bola pingpong itu dilabel dengan angka 1 hingga 10. Kebarangkalian mendapat angka 1, 3 atau 5 ialah 0.2 manakala kebarangkalian mendapat angka 2, 4, 6 atau 8 ialah 0.1. Sebiji bola pingpong dikeluarkan secara rawak dari kotak itu dan bola dikembalikan ke dalam kotak selepas angka dicatatkan. Proses ini diulang sebanyak 3 kali. Jika X mewakili bilangan kali mendapat angka 1, 3 atau 5,
 - senaraikan semua nilai bagi pemboleh ubah rawak X ,
 - tunjukkan bahawa X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan fungsi kebarangkalian $P(X = r)$,
 - lukis graf taburan kebarangkalian bagi X .
 - Diberi $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan kebarangkaliannya diberi dalam jadual di bawah.

$X = r$	0	1	2	3	4
$P(X = r)$	p	p	$p + q$	q	q

Jika $p = 2q$, cari nilai p dan q .

- Dalam suatu permainan catur, pemain akan diberi 1 mata jika menang, $\frac{1}{2}$ mata akan diberi jika seri dan 0 mata akan diberi jika kalah. Lee bermain tiga set permainan catur.
 - Bina gambarajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin.
 - Jika X mewakili bilangan mata yang diperolehi Lee, senaraikan set X .
 - Lukiskan graf bagi taburan kebarangkalian X .

5. Lakukan lambungan dadu sebanyak empat kali supaya duit syiling tersebut digerakkan sehingga berada di baris kelima.
6. Seterusnya, jawab soalan yang berikut.
 - (a) Adakah lambungan dadu merupakan percubaan Bernoulli?
 - (b) Apakah perkaitan antara setiap lambungan dadu? Adakah setiap lambungan dadu bersandar dengan lambungan dadu sebelumnya?
 - (c) Berapakah jenis kesudahan yang diperoleh bagi setiap lambungan? Senaraikan.
 - (d) Jika pemboleh ubah rawak diskret X mewakili bilangan kali mendapat nombor genap pada setiap lambungan dadu, tuliskan nilai bagi X dalam bentuk tatatanda set.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, dapat diperhatikan bahawa:

- Eksperimen terdiri daripada 4 percubaan Bernoulli yang serupa.
- Setiap percubaan hanya mempunyai dua kesudahan, iaitu 'kejayaan' dan 'kegagalan'.
- Kebarangkalian 'kejayaan' bagi setiap percubaan adalah tidak berubah.
- Setiap percubaan adalah tidak bersandar, iaitu kesudahan suatu percubaan tidak memberi kesan kepada kesudahan yang lain.

Ciri-ciri yang dinyatakan di atas dikenali sebagai **eksperimen binomial**. Secara amnya,

Pemboleh ubah rawak binomial ialah bilangan kejayaan r daripada n percubaan Bernoulli yang serupa bagi suatu eksperimen binomial. Taburan kebarangkalian bagi pemboleh ubah rawak binomial ini dikenali sebagai **taburan binomial**.

GALERI SEJARAH



Jacob Bernoulli ialah ahli matematik Swiss pada abad ke-17. Beliau mengkaji ciri-ciri percubaan yang mempunyai kebarangkalian kesudahan kejayaan yang sentiasa sama apabila percubaan diulang.

BAB

5

Contoh 6

Rajah di sebelah menunjukkan gambar rajah pokok yang mewakili semua kesudahan bagi dua pusingan suatu permainan *tic-tac-toe*. Adakah taburan ini merupakan taburan binomial? Jelaskan.



Penyelesaian

Taburan ini mempunyai tiga kesudahan yang mungkin, iaitu menang, seri atau kalah. Maka, taburan ini bukan taburan binomial kerana taburan binomial hanya mempunyai dua kesudahan sahaja dalam setiap percubaan.



Sebuah rak mengandungi 6 naskhah buku rujukan Kimia yang sama dan 4 naskhah buku rujukan Fizik yang sama. 3 naskhah buku rujukan Fizik diambil secara rawak satu demi satu dari rak itu tanpa dikembalikan. Nyatakan sama ada taburan kebarangkalian ini merupakan taburan binomial atau bukan. Jelaskan.

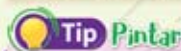


Penyelesaian

$$P(\text{mengambil senaskhah buku rujukan Fizik pertama}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{mengambil senaskhah buku rujukan Fizik kedua}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{mengambil senaskhah buku rujukan Fizik ketiga}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



Suatu eksperimen dengan keadaan n ialah 1 merupakan percubaan Bernoulli.

Kebarangkalian mengambil senaskhah buku rujukan Fizik dalam setiap percubaan berubah dan setiap kesudahan bersandar kepada kesudahan sebelumnya.

Maka, taburan kebarangkalian mengambil 3 naskhah buku rujukan Fizik berturut-turut tanpa dikembalikan ini bukan taburan binomial.

Latihan Kendiri 5.5

- Diberi X ialah pemboleh ubah rawak diskret bagi percubaan Bernoulli dengan kebarangkalian 'kejayaan' ialah 0.3.
 - Senaraikan unsur dalam set X .
 - Cari kebarangkalian 'kegagalan'.
- Satu eksperimen dijalankan dengan melambungkan sekeping duit syiling 50 sen pada percubaan pertama dan melambungkan sebiju dadu pada percubaan kedua. Jelaskan sama ada eksperimen ini merupakan eksperimen binomial atau bukan.
- Sebuah persatuan melakukan tinjauan tentang jumlah upah sebulan yang diperoleh kebanyakan rakyat Malaysia yang bekerja. Hasil tinjauan yang dilakukan mendapati bahawa 50% daripada rakyat Malaysia yang bekerja mendapat upah kurang daripada RM2 000 sebulan. Jika 3 orang pekerja dipilih secara rawak daripada satu kumpulan pekerja, jelaskan sama ada taburan kebarangkalian ini bertaburan secara binomial atau bukan.
- Dalam satu kajian, didapati bahawa 9 daripada 10 orang pelajar di sebuah kolej melakukan pekerjaan sambil. Jika 4 orang pelajar dipilih secara rawak dari kolej itu, adakah taburan kebarangkalian bagi pelajar yang melakukan pekerjaan sambil bertaburan secara binomial? Jelaskan.
- Didapati bahawa seorang murid lepasan SPM mempunyai tiga pilihan, iaitu menyambung pelajaran di dalam negara, menyambung pelajaran di luar negara atau tidak menyambung pelajaran. Seorang murid dipilih secara rawak daripada kumpulan murid itu. Lukis satu gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin. Jelaskan sama ada kesudahan itu merupakan taburan binomial.





Kebarangkalian suatu peristiwa bagi taburan binomial

Jika pemboleh ubah rawak binomial X mewakili bilangan kali 'kejayaan' dalam n percubaan yang tidak bersandar bagi satu eksperimen, dengan keadaan p ialah kebarangkalian 'kejayaan', $q = 1 - p$ ialah kebarangkalian 'kegagalan', maka fungsi kebarangkalian binomial bagi X diberi oleh rumus:

$$P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}, r = 1, 2, 3, \dots, n$$

Jadi, kita tulis sebagai $X \sim B(n, p)$.

Pertimbangkan peristiwa yang berikut:

Sebuah piramid segi tiga dengan empat permukaan rata yang sama saiz dilabel dengan nombor 1 hingga 4. Naim melambungkan piramid segi tiga itu sebanyak 3 kali. Apakah kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid itu dalam setiap lambungan?



Perhatikan bahawa lambungan sebuah piramid segi tiga sebanyak 3 kali merupakan suatu eksperimen binomial dengan $n = 3$. Jadi, kebarangkalian mendapat nombor 4 dalam setiap percubaan ialah:

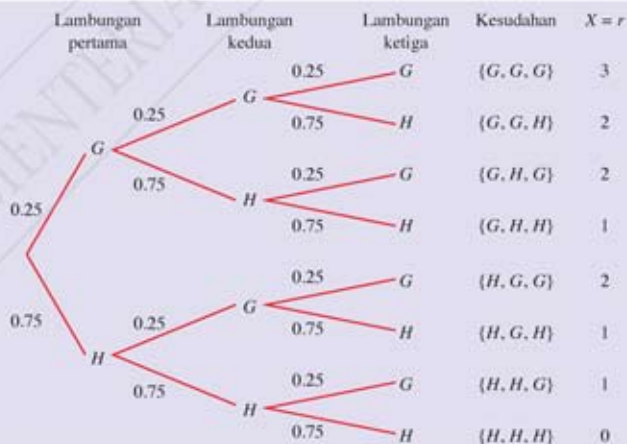
$$p = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \text{dan} \quad q = (1 - p) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Jika X mewakili pemboleh ubah rawak bilangan kali mendapat nombor 4 pada tapak piramid, maka $X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Katakan, G = kesudahan mendapat nombor 4 pada tapak piramid

dan H = kesudahan mendapat nombor bukan 4 pada tapak piramid

Kesudahan yang mungkin bagi lambungan sebuah piramid segi tiga dapat diperoleh menggunakan gambar rajah pokok seperti di bawah.



5.2 Taburan Binomial



Taburan binomial

Pertimbangkan situasi yang berikut:

Apabila sekeping duit syiling adil dilambungkan sekali, kesudahan yang diperoleh adalah sama ada gambar atau angka.

Perhatikan bahawa situasi di atas menghasilkan hanya dua kesudahan yang mungkin, iaitu mendapat gambar atau mendapat angka. Jika kesudahan mendapat gambar dianggap sebagai 'kejayaan', maka kesudahan mendapat angka dianggap sebagai 'kegagalan'. Suatu eksperimen yang menghasilkan hanya dua kesudahan yang mungkin dikenali sebagai **percubaan Bernoulli**. Ciri-ciri percubaan Bernoulli adalah seperti berikut:

- Hanya terdapat dua kesudahan yang mungkin, iaitu 'kejayaan' dan 'kegagalan'.
- Kebarangkalian 'kejayaan' sentiasa sama dalam setiap percubaan.
- Jika kebarangkalian 'kejayaan' diberi oleh p , maka kebarangkalian 'kegagalan' diberi oleh $(1 - p)$ dengan $0 < p < 1$.
- Pemboleh ubah rawak diskret $X = \{0, 1\}$, dengan keadaan 0 mewakili 'kegagalan' dan 1 mewakili 'kejayaan'.

Eksperimen yang terdiri daripada n percubaan Bernoulli yang serupa dikenali sebagai eksperimen binomial. Mari teroka perkaitan antara percubaan Bernoulli dengan taburan Binomial.

Aktiviti Penerokaan 3 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka perkaitan antara percubaan Bernoulli dengan taburan binomial

Langkah:

1. Sediakan sekeping kertas sebak, sebiji dadu adil dan sekeping duit syiling adil.
2. Lukis petak grid yang terdiri daripada lima baris dan sembilan lajur seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.
3. Letakkan sekeping duit syiling pada petak yang berada pada baris pertama dan lajur kelima.
4. Lambungkan dadu sekali dan gerakkan duit syiling mengikut syarat berikut:



- Jika nombor ganjil muncul, gerakkan duit syiling satu petak ke bawah dan satu petak ke kiri.
- Jika nombor genap muncul, gerakkan duit syiling satu petak ke bawah dan satu petak ke kanan.

Jadual di bawah menunjukkan semua kesudahan dan taburan kebarangkalian masing-masing berdasarkan gambar rajah pokok dan rumus taburan binomial.

	Daripada gambar rajah pokok	Menggunakan rumus taburan binomial
$X = r$	$P(X = r)$	$P(X = r)$
0	$P(X = 0) = P(H, H, H)$ $= 0.75^3$ $= 0.4219$	${}^3C_0(0.25)^0(0.75)^3 = 0.4219$
1	$P(X = 1) = P(G, H, H) + P(H, G, H) + P(H, H, G)$ $= 3(0.75)^2(0.25)$ $= 0.4219$	${}^3C_1(0.25)^1(0.75)^2 = 0.4219$
2	$P(X = 2) = P(G, G, H) + P(G, H, G) + P(H, G, G)$ $= 3(0.75)(0.25)^2$ $= 0.1406$	${}^3C_2(0.25)^2(0.75)^1 = 0.1406$
3	$P(X = 3) = P(G, G, G)$ $= (0.25)^3$ $= 0.0156$	${}^3C_3(0.25)^3(0.75)^0 = 0.0156$

Perhatikan bahawa kedua-dua kaedah, iaitu menggunakan gambar rajah pokok dan rumus taburan binomial menghasilkan nilai kebarangkalian yang sama bagi setiap pemboleh ubah rawak X . Namun, gambar rajah pokok akan menjadi lebih rumit untuk dilukis jika lambungan melebihi tiga kali.

Bagi kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid kurang daripada 2 kali,

$$\begin{aligned}
 P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\
 &= 0.4219 + 0.4219 \\
 &= 0.8438
 \end{aligned}$$

Bagi kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid lebih besar daripada 0 kali,

$$\begin{aligned}
 P(X > 0) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
 &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - 0.4219 \\
 &= 0.5781
 \end{aligned}$$

Daripada jadual di atas, hasil tambah kebarangkalian bagi semua pemboleh ubah rawak X :

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
 = 0.4219 + 0.4219 + 0.1406 + 0.0156 \\
 = 1
 \end{aligned}$$

Secara amnya,

$$\sum_{i=1}^n P(X = r_i) = 1$$



Akses QR

Pembuktian

$$\sum_{i=1}^n P(X = r_i) = 1$$



bit.ly/38VW19G

Kuiz Pantas

Apakah kebarangkalian bagi mendapat nombor 4 pada tapak piramid adalah kurang daripada 1 kali atau lebih besar daripada 2 kali?

Contoh 8

Kebarangkalian bahawa hujan akan turun pada suatu hari tertentu ialah 0.45. Dengan menggunakan rumus, cari kebarangkalian bahawa dalam suatu minggu tertentu, hujan akan turun

- (a) tepat 4 hari,
(b) sekurang-kurangnya 2 hari.

Penyelesaian

Katakan X mewakili bilangan hari hujan.

Diberi $n = 7$, $p = 0.45$ dan $q = 0.55$.

$$(a) P(X = 4) = {}^7C_4(0.45)^4(0.55)^3 \\ = 0.2388$$

$$(b) P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ + P(X = 6) + P(X = 7) \\ = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ = 1 - [{}^7C_0(0.45)^0(0.55)^7 + {}^7C_1(0.45)^1(0.55)^6] \\ = 1 - 0.0152 - 0.0872 \\ = 0.8976$$

Tip Pintar

'C', bermaksud dalam n bilangan percubaan, mana-mana r kali 'kejayaan' dipilih. Berdasarkan Contoh 8(a), dalam 7 hari, 4 hari dipilih.

Pilih 4 daripada 7

$${}^7C_4(0.45)^4(0.55)^3$$

4 kali kebarangkalian 'kejayaan'

3 kali kebarangkalian 'kegagalan'

Latihan Kendiri 5.6

- Pada tahun 2019, anggaran bilangan penduduk Malaysia ialah 32.6 juta orang. Dalam satu kajian yang dilakukan, didapati bahawa lebih kurang 57% daripada rakyat Malaysia menggunakan telefon pintar. Satu sampel yang terdiri daripada 8 orang dipilih secara rawak. Cari kebarangkalian bahawa
 - 6 orang menggunakan telefon pintar,
 - tidak lebih daripada 2 orang menggunakan telefon pintar.
- Sebuah rak mengandungi 3 naskhah buku cerita dan 2 naskhah buku komik. Senaskhah buku diambil dan selepas dibaca, buku itu dikembalikan sebelum senaskhah buku lagi diambil dari rak itu. Proses ini diulang sebanyak 3 kali. Jika X mewakili pemboleh ubah rawak mendapat senaskhah buku komik,
 - bina gambarajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin,
 - cari kebarangkalian mendapat
 - buku komik hanya sekali,
 - buku cerita sebanyak tiga kali.
- Dalam satu kajian, didapati bahawa 95% daripada pelajar sarjana muda di sebuah universiti memiliki sebuah komputer riba. Satu sampel yang terdiri daripada 8 orang pelajar sarjana muda dipilih secara rawak dari universiti itu, cari kebarangkalian bahawa
 - tepat 6 orang pelajar sarjana muda memiliki sebuah komputer riba,
 - selebih-lebihnya 2 orang atau lebih daripada 7 orang pelajar sarjana muda memiliki komputer riba.
- Diberi satu pemboleh ubah rawak $X \sim B(n, 0.65)$.
 - Cari nilai n jika $P(X = n) = 0.0319$.
 - Berdasarkan jawapan di (a), cari $P(X > 2)$.

Aktiviti Penerokaan

4

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Membina jadual, melukis graf dan mentafsir maklumat taburan binomial

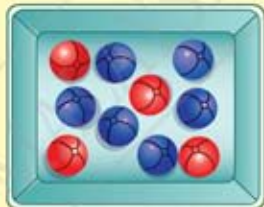
Langkah:

1. Bentukkan beberapa kumpulan yang terdiri daripada empat orang ahli.

- Sediakan sebuah bekas. Masukkan 4 biji bola merah dan 6 biji bola biru ke dalam bekas tersebut.
- Seorang ahli kumpulan akan mengeluarkan sebiji bola secara rawak dari bekas tersebut.
- Ahli yang lain akan merekodkan warna bola yang dikeluarkan dan bola itu akan dimasukkan semula ke dalam bekas.
- Proses ini diulang sebanyak lima kali.

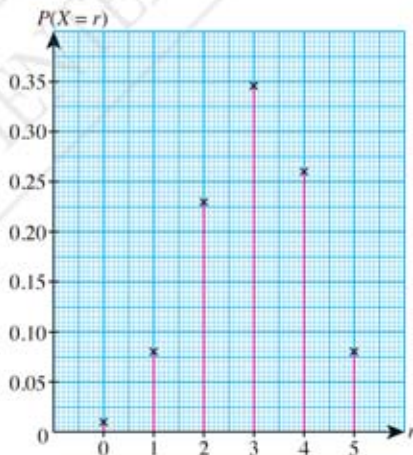


ggbm.at/aprtyguy



2. Katakan X ialah pemboleh ubah rawak mengeluarkan sebiji bola berwarna biru, dengan menggunakan rumus $P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$, dengan keadaan $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, bina jadual taburan kebarangkalian.
3. Seterusnya, bina graf taburan kebarangkalian menggunakan perisian geometri dinamik GeoGebra dengan mengimbas kod QR atau layari pautan yang disediakan.
4. Daripada jadual kebarangkalian dan graf yang dibina, cari kebarangkalian yang berikut.
 - (a) $P(X = 3)$,
 - (b) $P(X < 3)$,
 - (c) $P(1 < X < 3)$.
5. Bagaimanakah anda menentukan kebarangkalian daripada jadual dan graf?
6. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 4, didapati bahawa kebarangkalian pemboleh ubah rawak X bagi taburan binomial dapat diperoleh daripada jadual dan graf taburan kebarangkalian. Graf taburan kebarangkalian boleh dilukis seperti rajah di bawah.



Untuk sebarang n bagi suatu taburan binomial:

- Apabila $p = 0.5$, bentuk graf adalah simetri.
- Apabila $p < 0.5$, graf bergerak ke kiri dan tidak simetri.
- Apabila $p > 0.5$, graf bergerak ke kanan dan tidak simetri.

Contoh 9

Emma melakukan tinjauan tentang peratus murid di sekolahnya yang menaiki bas sekolah. Didapati bahawa 45% daripada murid di sekolahnya menaiki bas sekolah. Satu sampel yang terdiri daripada 4 orang murid dipilih secara rawak dari sekolah itu.

- Bina jadual taburan kebarangkalian binomial bagi bilangan murid yang menaiki bas sekolah.
- Lukis graf bagi taburan ini.
- Daripada jadual atau graf, cari kebarangkalian
 - lebih daripada 3 orang murid menaiki bas sekolah,
 - kurang daripada 2 orang murid menaiki bas sekolah.

Penyelesaian

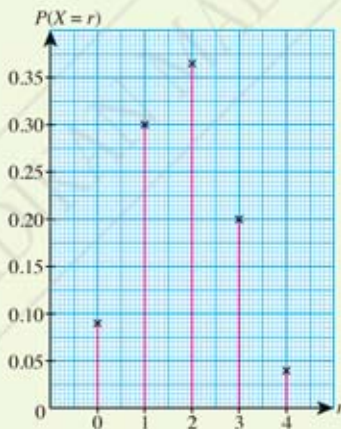
- (a) Katakan X mewakili bilangan murid yang menaiki bas sekolah.

Maka, $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Diberi $n = 4$, $p = 0.45$ dan $q = 0.55$

$X = r$	$P(X = r)$
0	${}^4C_0(0.45)^0(0.55)^4 = 0.0915$
1	${}^4C_1(0.45)^1(0.55)^3 = 0.2995$
2	${}^4C_2(0.45)^2(0.55)^2 = 0.3675$
3	${}^4C_3(0.45)^3(0.55)^1 = 0.2005$
4	${}^4C_4(0.45)^4(0.55)^0 = 0.0410$

(b)



- (c) (i) $P(X > 3) = P(X = 4)$
 $= 0.0410$
 (ii) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
 $= 0.0915 + 0.2995$
 $= 0.3910$

Contoh 10

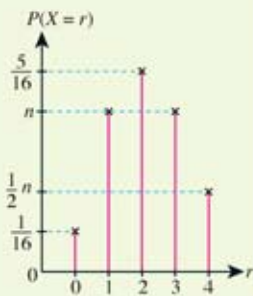
Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi suatu taburan binomial.

- Nyatakan semua kesudahan yang mungkin bagi X .
- Cari nilai n .

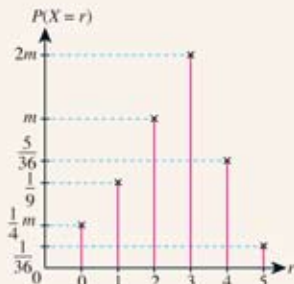
Penyelesaian

- (a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- (b) $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$
 $\frac{1}{16} + \frac{1}{2}n + n + \frac{5}{16} + n = 1$
 $n = \frac{1}{4}$



- Didapati bahawa 35% daripada murid Tingkatan 5 Bestari mendapat gred B dalam mata pelajaran Matematik Tambahan. Jika 6 orang murid dipilih secara rawak dari kelas itu, cari kebarangkalian bahawa
 - 4 orang murid mendapat gred B,
 - lebih daripada seorang murid mendapat gred B.
- Dalam satu kajian, kebarangkalian bahawa sejenis telefon pintar akan rosak selepas 3 tahun digunakan ialah 78%.
 - Jika 7 buah telefon pintar ini dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa 4 buah telefon pintar akan rosak selepas 3 tahun digunakan.
 - Cari bilangan telefon pintar yang akan rosak jika sampel itu ialah 200.
- Dalam suatu laporan, 54% daripada rakyat Malaysia membeli kereta baharu buatan tempatan. Jika 8 orang yang membeli kereta baharu dipilih secara rawak, cari kebarangkalian
 - sekurang-kurangnya 2 orang membeli kereta baharu buatan tempatan,
 - lebih daripada 6 orang membeli kereta baharu buatan tempatan.
- Didapati bahawa kebarangkalian sebuah kilang elektronik menghasilkan mesin cetak yang kurang memuaskan ialah 0.05. Lima buah mesin cetak dipilih secara rawak dari kilang itu.
 - Bina jadual taburan kebarangkalian bagi bilangan mesin cetak yang kurang memuaskan dan seterusnya lukiskan graf.
 - Daripada jadual atau graf, cari kebarangkalian bahawa
 - tepat 2 buah mesin cetak kurang memuaskan,
 - lebih daripada sebuah mesin cetak kurang memuaskan.
- Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi suatu taburan binomial dengan pemboleh ubah rawak diskret X .
 - Nyatakan semua kesudahan yang mungkin bagi X .
 - Cari nilai m bagi graf itu.
 - Cari peratus bagi $P(X \geq 2)$.



- Dalam satu kajian, didapati bahawa 17% daripada rakyat Malaysia yang berumur 18 tahun dan ke atas menghidap penyakit diabetes. Jika 10 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan umur itu, cari
 - kebarangkalian bahawa 5 orang menghidap penyakit diabetes,
 - $P(2 \leq X \leq 6)$ dengan keadaan X mewakili bilangan rakyat Malaysia berumur 18 tahun dan ke atas yang menghidap penyakit diabetes.



Nilai min, varians dan sisihan piawai bagi suatu taburan binomial

Anda telah mempelajari bahawa taburan binomial terdiri daripada n percubaan Bernoulli yang tidak bersandar dan setiap percubaan itu mempunyai kebarangkalian 'kejayaan' yang sama. Apakah yang dimaksudkan dengan min atau nilai jangkaan bagi taburan binomial ini? Mari teroka dengan lebih lanjut tentangnya.

Aktiviti Penerokaan 5 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Menentukan nilai min bagi suatu taburan binomial

Langkah:

1. Teliti dua situasi di bawah.

Situasi 1

Sekeping duit syiling adil dilambungkan sebanyak 100 kali. Katakan X mewakili bilangan kali mendapat gambar.

Situasi 2

Satu ujian objektif mempunyai 60 soalan dengan setiap soalan terdiri daripada empat pilihan jawapan. Seorang murid menjawab semua soalan itu secara rawak. Katakan X mewakili bilangan soalan yang dijawab dengan betul.

2. Daripada Situasi 1, anggarkan bilangan kali mendapat gambar berdasarkan konsep nisbah. Jelaskan.
3. Daripada Situasi 2, anggarkan bilangan soalan yang dijawab dengan betul berdasarkan konsep nisbah. Jelaskan.
4. Bincangkan jawapan yang diperoleh dengan pasangan lain.

Daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa nilai jangkaan bagi suatu taburan binomial ialah hasil darab bilangan percubaan Bernoulli dengan kebarangkalian peristiwa 'kejayaan' berlaku.

Jika suatu pemboleh ubah rawak diskret X bertaburan binomial, iaitu $X \sim B(n, p)$, maka **nilai jangkaan** atau **min**, μ bagi taburan ini ditakrifkan sebagai jumlah hasil darab X dengan kebarangkaliannya dan dibahagi oleh jumlah kebarangkalian.

$$\mu = \frac{\sum_{r=0}^n r P(X = r)}{\sum_{r=0}^n P(X = r)}$$

Oleh kerana $\sum_{r=0}^n P(X = r) = 1$, maka rumus bagi min boleh diringkaskan seperti berikut.

$$\text{Min, } \mu = np$$

Sisihan piawai, σ ialah ukuran saiz sebaran suatu set data daripada nilai jangkaannya.

Varians, σ^2 dan sisihan piawai, σ bagi taburan binomial diberi oleh rumus berikut.

$$\text{Varians, } \sigma^2 = npq$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{npq}$$

Akses QR

Pembuktian rumus min dan varians taburan binomial.



bit.ly/2Sgrlk7

Contoh 11

Suatu kajian mendapati bahawa 95% daripada rakyat Malaysia yang berumur 20 tahun dan ke atas mempunyai lesen memandu kereta. Jika 160 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan umur itu, jangkakan bilangan rakyat Malaysia berumur 20 tahun dan ke atas yang mempunyai lesen memandu kereta. Seterusnya, cari varians dan sisihan piawai bagi taburan ini.

Penyelesaian

Diberi $p = 0.95$, $q = 0.05$ dan $n = 160$.

Min, $\mu = np$

$$\mu = 160 \times 0.95$$

$$\mu = 152$$

Varians, $\sigma^2 = npq$

$$\sigma^2 = 160 \times 0.95 \times 0.05$$

$$\sigma^2 = 7.60$$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{npq}$

$$\sigma = \sqrt{7.6}$$

$$\sigma = 2.76$$

Kuiz Pantas

Mengapakah sisihan piawai ialah punca kuasa dua varians? Jelaskan.

Latihan Kendiri 5.8

1. Suatu pemboleh ubah rawak diskret X bertaburan binomial, iaitu $X \sim B(n, p)$ dengan min 45 dan sisihan piawai 3. Cari nilai n dan p .
2. Suatu pemboleh ubah rawak diskret $X \sim B(120, 0.4)$. Cari min dan sisihan piawainya.
3. Terdapat 5 000 orang penduduk di sebuah kampung. Didapati bahawa 8 daripada 10 orang penduduk kampung itu memiliki jalur lebar di rumahnya. Cari min, varians dan sisihan piawai bagi bilangan penduduk yang memiliki jalur lebar di rumahnya.
4. Dalam suatu kajian, didapati bahawa 3 daripada 5 orang lelaki dewasa gemar menonton perlawanan bola sepak. Jika 1 000 orang lelaki dewasa dipilih secara rawak, cari min dan sisihan piawai bagi bilangan lelaki dewasa yang gemar menonton perlawanan bola sepak.



Menyelesaikan masalah yang melibatkan taburan binomial

Contoh 12

Sebuah kedai kek menghasilkan sejenis kek coklat. Didapati bahawa 12% daripada kek coklat itu berjisim kurang daripada 1 kg. Cari bilangan minimum kek coklat yang perlu dipantau supaya kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya sebiji kek coklat berjisim kurang daripada 1 kg yang dipilih secara rawak adalah lebih besar daripada 0.85.



Penyelesaian

Katakan X mewakili bilangan kek coklat yang berjisim kurang daripada 1 kg. Maka, $X \sim B(n, p)$ dengan $p = 0.12$ dan $q = 0.88$.

$$P(X \geq 1) > 0.85$$

$$1 - P(X = 0) > 0.85$$

$$P(X = 0) < 1 - 0.85$$

$${}^nC_0(0.12)^0(0.88)^n < 0.15$$

$$(0.88)^n < 0.15$$

$$n \log 0.88 < \log 0.15$$

$$n > \frac{\log 0.15}{\log 0.88}$$

$$n > 14.84$$

Ambil log bagi kedua-dua belah persamaan

Kuiz Pantas

Dalam Contoh 12, nyatakan alasan anda mengapa

$$\begin{aligned} n &> \frac{\log 0.15}{\log 0.88} \text{ bukan} \\ n &< \frac{\log 0.15}{\log 0.88} \end{aligned}$$

Maka, bilangan minimum kek coklat yang perlu dipantau ialah $n = 15$.

Contoh 13

APLIKASI MATEMATIK

Dalam satu kajian, didapati bahawa 35% daripada rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 berkemampuan membeli sebuah rumah sendiri. Jika 10 orang daripada rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun itu dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa tidak lebih daripada dua orang yang berkemampuan membeli rumah sendiri.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Masalah ini menunjukkan ciri-ciri taburan binomial dengan $n = 10$ dan $p = 0.35$.
- ◆ Cari $P(\text{tidak lebih daripada dua orang yang berkemampuan membeli rumah sendiri})$.

2. Merancang strategi

- ◆ Katakan X mewakili bilangan rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 berkemampuan membeli rumah sendiri.
- ◆ $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ dengan menggunakan rumus $P(X = r) = {}^nC_rp^rq^{n-r}$ yang $r = 0, 1$ dan 2 .

3. Melaksanakan strategi

Didapati bahawa, $q = 1 - p$
 $q = 1 - 0.35$
 $q = 0.65$

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\&= {}^{10}C_0(0.35)^0(0.65)^{10} + {}^{10}C_1(0.35)^1(0.65)^9 + {}^{10}C_2(0.35)^2(0.65)^8 \\&= 0.0135 + 0.0725 + 0.1757 \\&= 0.2617\end{aligned}$$

4. Membuat refleksi

Katakan Y mewakili bilangan rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 tidak berkemampuan membeli rumah sendiri. Maka, $n = 10$, $p = 0.65$ dan $q = 0.35$.

$$\begin{aligned}P(Y \geq 8) &= P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) \\&= {}^{10}C_8(0.65)^8(0.35)^2 + {}^{10}C_9(0.65)^9(0.35)^1 + {}^{10}C_{10}(0.65)^{10}(0.35)^0 \\&= 0.1757 + 0.0725 + 0.0135 \\&= 0.2617\end{aligned}$$

Latihan Kendiri 5.9

- 7 orang pelajar di sebuah universiti tempatan memohon biasiswa yayasan negeri masing-masing. Kebarangkalian bahawa setiap pelajar akan berjaya mendapat biasiswa ialah $\frac{1}{3}$. Cari kebarangkalian bahawa
 - semua pelajar berjaya mendapat biasiswa,
 - hanya dua orang pelajar berjaya mendapat biasiswa,
 - selebih-lebihnya dua orang pelajar mendapat biasiswa.
- Dalam suatu permainan, peserta perlu meneka bilangan guli dalam sebuah botol. Kebarangkalian memperoleh tekaan yang tepat ialah p .
 - Cari nilai p dan bilangan kali tekaan supaya min dan varians masing-masing ialah 36 dan 14.4,
 - Jika peserta membuat lapan kali tekaan, cari kebarangkalian bahawa empat kali tekaan adalah tepat.
- 80% daripada murid sebuah sekolah meminati mata pelajaran Sains. Suatu sampel yang terdiri daripada n orang murid dipilih secara rawak dari sekolah itu.
 - Jika kebarangkalian bahawa semua murid minat mata pelajaran Sains ialah 0.1342, cari nilai n .
 - Berdasarkan jawapan di (a), cari kebarangkalian bahawa kurang daripada tiga orang murid minat mata pelajaran Sains.

Latihan Formatif 5.2
Kuiz
bit.ly/2sQUHeg


- Sekeping duit syiling adil dilambungkan sebanyak empat kali. Bina jadual taburan kebarangkalian untuk mendapat angka.
- Sebiji dadu adil dilambungkan sebanyak 3 kali. Bina jadual dan lukis graf taburan kebarangkalian untuk mendapat nombor lebih daripada 3.
- Kebarangkalian seorang murid Tingkatan 5 melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan ialah 0.85. Dalam suatu sampel yang terdiri daripada lapan orang murid Tingkatan 5, cari kebarangkalian bahawa
 - semua murid melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan,
 - kurang daripada tiga orang murid melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan.

- Sebiji durian dipilih secara rawak dari beberapa buah bakul. Kebarangkalian bahawa sebiji durian yang dipilih adalah busuk ialah 0.1. Cari nilai jangkaan dan sisihan piawai bilangan durian yang busuk dalam satu sampel bagi 50 biji durian.


5

- Pemboleh ubah rawak binomial $X \sim B(n, p)$ mempunyai min 5 dan varians 4.
 - Cari nilai n dan p .
 - Seterusnya, cari $P(X = 3)$.
- X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret supaya $X \sim B(10, p)$ dengan $p < 0.5$ dan varians $= \frac{12}{5}$. Cari
 - nilai p dan min bagi X ,
 - $P(X = 4)$.
- 20 keping duit syiling adil dilambungkan secara serentak. X ialah pemboleh ubah rawak diskret yang mewakili bilangan angka diperoleh. Hitung min dan varians bagi X .
- Dalam satu kajian, didapati bahawa 1 daripada 5 buah kalkulator jenama A boleh bertahan lebih daripada 8 tahun. Satu sampel yang terdiri daripada n buah kalkulator dipilih secara rawak daripada jenama itu. Jika kebarangkalian semua kalkulator boleh bertahan lebih daripada 8 tahun ialah 0.0016, cari
 - nilai n ,
 - kebarangkalian bahawa lebih daripada sebuah kalkulator boleh bertahan lebih daripada 8 tahun.
- Dalam suatu ujian objektif yang terdiri daripada 16 soalan, setiap soalan mempunyai empat pilihan jawapan dengan satu daripadanya adalah betul. Seorang murid meneka jawapan bagi setiap soalan itu.
 - Jangkakan bilangan soalan yang ditekakan dengan salah.
 - Cari kebarangkalian bahawa murid itu
 - mendapat semua jawapan salah,
 - lulus dalam ujian jika 60% dianggap sebagai lulus.

