

BAB 6

FUNGSI TRIGONOMETRI



Apakah yang akan dipelajari?

- Sudut Positif dan Sudut Negatif
- Nisbah Trigonometri bagi Sebarang Sudut
- Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen
- Identiti Asas
- Rumus Sudut Majmuk dan Rumus Sudut Berganda
- Aplikasi Fungsi Trigonometri

Senarai
Standard
Pembelajaran



bit.ly/2Q9UMSA

Jambatan Angkat Kuala Terengganu menyeberangi muara Sungai Terengganu dan menghubungkan Kuala Nerus dengan Kuala Terengganu. Jambatan sepanjang 638 meter dengan lebar 23 meter ini berkonsepkan *Bascule Bridge* atau *Drawbridge*. Konsep trigonometri melibatkan sudut yang biasanya digunakan untuk mengira tork (*torque*) dan daya yang terlibat dalam pembinaan jambatan. Apakah maklumat yang diperlukan untuk mengira lebar laluan kapal apabila jambatan itu terbuka? Apakah rumus trigonometri yang selalu digunakan?

Sudut • Maklumat

Abu Abdullah Muhammad Ibn Jabir Ibn Sinan al-Battani al-Harrani (858-929 M) ialah seorang ahli matematik yang mahir dalam bidang trigonometri.

Beliau berjaya meletakkan bidang trigonometri pada tahap yang tinggi dan merupakan orang pertama menghasilkan jadual kotangen.

Untuk maklumat lanjut:



bit.ly/2s5h8UR



Kepentingan Bab Ini

Konsep-konsep trigonometri banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah harian. Misalnya:

- Bidang astronomi menggunakan konsep segi tiga untuk menentukan kedudukan tempat menggunakan latitud dan longitud.
- Bidang kartografi dalam penciptaan peta.
- Bidang oseanografi untuk menentukan ketinggian gelombang air laut.
- Bidang ketenteraan dan penerbangan.

Kata Kunci

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| ● Darjah | <i>Degree</i> |
| ● Radian | <i>Radian</i> |
| ● Nisbah trigonometri | <i>Trigonometric ratio</i> |
| ● Sukuan | <i>Quadrant</i> |
| ● Identiti asas | <i>Basic identities</i> |
| ● Rumus sudut pelengkap | <i>Complementary angle formula</i> |
| ● Rumus sudut majmuk | <i>Addition angle formula</i> |
| ● Rumus sudut berganda | <i>Double angle formula</i> |

Video mengenal
Jambatan-Angkat
Terengganu



bit.ly/398l9Vx

6.1 Sudut Positif dan Sudut Negatif



Mewakilkkan sudut positif dan sudut negatif dalam satah Cartes

Dalam kehidupan seharian, terdapat banyak objek yang berputar sama ada mengikut arah jam atau lawan arah jam. Jarum minit dan jarum jam bagi sebuah jam dikatakan berputar mengikut arah jam. Perhatikan gambar jam di bawah.

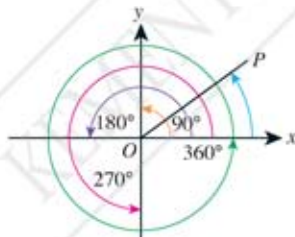


Apakah arah putaran yang diwakili oleh anak panah berwarna merah dan biru? Anak panah berwarna biru adalah putaran mengikut arah jam manakala anak panah berwarna merah adalah putaran mengikut lawan arah jam.

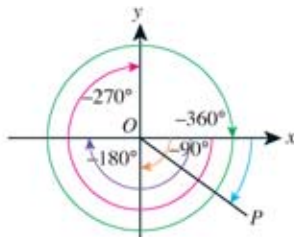
Dalam trigonometri,

- **Sudut positif** ialah sudut yang diukur mengikut lawan arah jam dari paksi-x yang positif.
- **Sudut negatif** ialah sudut yang diukur mengikut arah jam dari paksi-x yang positif.

Rajah 6.1 dan Rajah 6.2 masing-masing menunjukkan sudut positif dan negatif yang terbentuk pada sukuan bulatan, semibulatan, tiga suku bulatan dan satu bulatan penuh apabila garis OP diputar pada lawan arah jam dan arah jam dari paksi-x yang positif.



Rajah 6.1



Rajah 6.2

Anda telah mempelajari bahawa sudut pada bulatan penuh ialah 360° dan saiz suatu sudut boleh diberi dalam unit darjah, minit dan radian. Apakah hubungan antara unit darjah, minit dan radian? Bagaimanakah kita boleh menentukan kedudukan suatu sudut dalam sukuan?



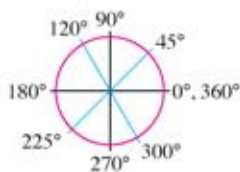
Imbas Kembali

Kedudukan suatu sudut boleh dinyatakan dalam bentuk sukuan.



Kuiz Pantas

Diberi $n \text{ rad} = 180^\circ$. Tukarkan setiap sudut yang berikut kepada radian.



Aktiviti Penerokaan

1

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Meneroka sudut positif dan sudut negatif serta menentukan kedudukan suatu sudut dalam sukuan

Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang orientasi positif dan seret gelongsor sudut ke kiri dan ke kanan.
3. Klik butang orientasi negatif pula dan seret gelongsor sudut ke kiri dan ke kanan.
4. Kenal pasti perbezaan antara sudut dalam orientasi positif dengan sudut dalam orientasi negatif.
5. Salin dan lengkapkan jadual di bawah dengan menentukan kedudukan setiap sudut berikut.


ggbm.at/uj4xjmxv

Sudut	Sukuan	Sudut	Sukuan	Sudut	Sukuan
140°		$1\,000^\circ$		-550°	
$\frac{7}{6}\pi$ rad		$\frac{13}{2}\pi$ rad		$-\frac{16}{3}\pi$ rad	
500°		-135°		-850°	
$\frac{11}{6}\pi$ rad		$-\frac{5}{6}\pi$ rad		$-\frac{27}{8}\pi$ rad	

6. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan lain.
7. Kemudian, bentangkan perbandingan tersebut di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa suatu sudut sama ada sudut positif atau negatif boleh berada dalam empat sukuan. Satu putaran lengkap berlaku apabila satu garis diputar sebanyak 360° atau 2π rad pada asalan O . Apabila garis itu diputar melebihi satu pusingan, sudut yang terbentuk adalah lebih daripada 360° atau 2π rad.

Kedudukan suatu sudut boleh digambarkan dengan menggunakan satah Cartes.

Secara amnya,

Jika θ ialah suatu sudut dalam sukuan dengan keadaan $\theta > 360^\circ$, maka kedudukan θ boleh ditentukan dengan menolak gandaan 360° atau 2π rad untuk memperoleh sudut sepadan dalam $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ atau $0 \leq \theta \leq 2\pi$ rad.

Tip Pintar

Kedudukan suatu sudut dapat ditentukan dengan menukarkan sudut dalam unit radian kepada unit darjah.

$$60' = 1^\circ$$

$$\theta^\circ = \left(\theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \right) \text{ rad}$$

$$\theta \text{ rad} = \left(\theta \text{ rad} \times \frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

BAB

6

Tentukan kedudukan setiap sudut yang berikut pada sukuan masing-masing. Seterusnya, tunjukkan sudut tersebut dalam satah Cartes.

(a) 800°

(b) $\frac{19}{6}\pi$ rad

Penyelesaian

(a) $800^\circ - 2(360^\circ) = 80^\circ$

$800^\circ = 2(360^\circ) + 80^\circ$

Maka, 800° berada di Sukuan I.



(b) $\frac{19}{6}\pi$ rad $- 2\pi$ rad $= \frac{7}{6}\pi$ rad

$\frac{19}{6}\pi$ rad $= 2\pi$ rad $+ \frac{7}{6}\pi$ rad

Maka, $\frac{19}{6}\pi$ rad berada di Sukuan III.



Latihan Kendiri 6.1

- Tukarkan setiap sudut yang berikut kepada unit radian.
 (a) $290^\circ 10'$ (b) -359.4° (c) 620° (d) -790°
- Tukarkan setiap sudut yang berikut kepada unit darjah.
 (a) 1.3 rad (b) $\frac{13}{4}$ rad (c) -2.7π rad (d) $\frac{13}{4}\pi$ rad
- Tentukan sukuan bagi setiap sudut berikut. Seterusnya, wakilkan setiap sudut tersebut dalam satah Cartes secara berasingan.
 (a) 75° (b) -340.5° (c) 550° (d) -735°
 (e) 0.36 rad (f) -4 rad (g) $\frac{5}{3}\pi$ rad (h) $-\frac{20}{3}\pi$ rad

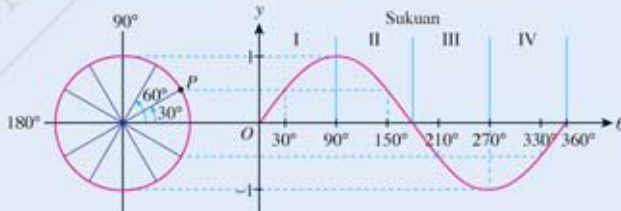
Latihan Formatif 6.1

Kuiz

bit.ly/2SuK9MF



- Rajah di bawah menunjukkan graf $y = \sin \theta$ bagi $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.



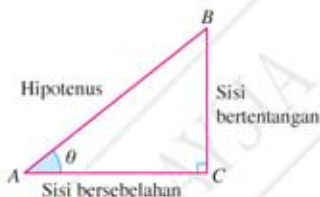
Tukarkan setiap sudut pada paksi- θ kepada unit radian. Seterusnya, tunjukkan setiap sudut tersebut dalam satah Cartes secara berasingan.

6.2 Nisbah Trigonometri bagi Sebarang Sudut

Perkaitan antara sekan, kosekan dan kotangen dengan sinus, kosinus dan tangen bagi sebarang sudut dalam satah Cartes

Perhatikan segi tiga ABC dalam rajah di sebelah.
Nisbah trigonometri dapat ditakrifkan seperti yang berikut:

$$\begin{aligned}\bullet \sin \theta &= \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{hipotenus}} = \frac{BC}{AB} \\ \bullet \cos \theta &= \frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{hipotenus}} = \frac{AC}{AB} \\ \bullet \tan \theta &= \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{sisi bersebelahan}} = \frac{BC}{AC}\end{aligned}$$



Selain tiga nisbah trigonometri di atas, terdapat tiga nisbah trigonometri lain yang merupakan salingan kepada nisbah trigonometri itu. Nisbah-nisbah trigonometri tersebut ialah kosekan, sekan dan kotangen yang ditakrifkan seperti berikut:

$$\begin{aligned}\bullet \text{kosek } \theta &= \frac{\text{hipotenus}}{\text{sisi bertentangan}} = \frac{AB}{BC} \\ \bullet \text{sek } \theta &= \frac{\text{hipotenus}}{\text{sisi bersebelahan}} = \frac{AB}{AC} \\ \bullet \text{kot } \theta &= \frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{sisi bertentangan}} = \frac{AC}{BC}\end{aligned}$$

Berdasarkan segi tiga ABC itu, didapati bahawa:

$$\text{kosek } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{sek } \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{kot } \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Tip Pintar



Diberi A ialah suatu sudut, maka
 $\sin A = \frac{1}{\text{kosek } A}$
 $\text{kosek } A = \frac{1}{\sin A}$
 $\text{kot } A = \frac{1}{\tan A}$

Contoh 2

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga ABC bersudut tegak di B . Diberi $AB = 8$ cm dan $BC = 6$ cm, tentukan nilai bagi

- (a) $\text{kosek } \theta$ (b) $\text{sek } \theta$ (c) $\text{kot } \theta$

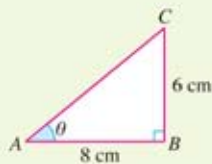
Penyelesaian

Dengan menggunakan teorem Pythagoras, $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

$$\begin{aligned}\text{(a) } \text{kosek } \theta &= \frac{10}{6} \\ &= 1.667\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } \text{sek } \theta &= \frac{10}{8} \\ &= 1.25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c) } \text{kot } \theta &= \frac{8}{6} \\ &= 1.333\end{aligned}$$



Diberi $\alpha = 56^\circ$. Dengan menggunakan kalkulator, cari nilai bagi

- (a) kosek α (b) sek α (c) kot α

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) kosek } 56^\circ &= \frac{1}{\sin 56^\circ} & \text{(b) sek } 56^\circ &= \frac{1}{\cos 56^\circ} & \text{(c) kot } 56^\circ &= \frac{1}{\tan 56^\circ} \\ &= 1.206 & &= 1.788 & &= 0.675 \end{aligned}$$

Sudut A dan sudut B dikatakan **sudut pelengkap** antara satu sama lain jika $A + B = 90^\circ$. Oleh itu,

$$A = 90^\circ - B \quad \text{dan} \quad B = 90^\circ - A$$

Aktiviti Penerokaan

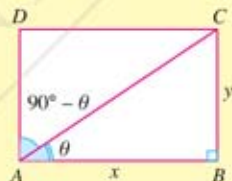
2

Berkumpulan **PAK-21**

Tujuan: Menerbitkan rumus sudut pelengkap

Langkah:

- Perhatikan segi empat tepat $ABCD$ dalam rajah di sebelah. Kemudian, lengkapkan panjang sisi bagi segi empat tepat $ABCD$ itu.
- Salin dan lengkapkan jadual di bawah dalam sebutan x dan y .



Lajur A	Lajur B
$\sin \theta =$	$\sin (90^\circ - \theta) =$
$\cos \theta =$	$\cos (90^\circ - \theta) =$
$\tan \theta =$	$\tan (90^\circ - \theta) =$
$\cot \theta =$	$\cot (90^\circ - \theta) =$
$\sec \theta =$	$\sec (90^\circ - \theta) =$
$\csc \theta =$	$\csc (90^\circ - \theta) =$

- Berdasarkan jadual di atas, padankan nisbah trigonometri dalam Lajur A dengan nisbah trigonometri dalam Lajur B.
- Seterusnya, bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan lain dan buat kesimpulan menyeluruh tentang perbandingan yang dilakukan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 2, rumus sudut pelengkap adalah seperti berikut:

- $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$
- $\cos \theta = \sin (90^\circ - \theta)$
- $\tan \theta = \cot (90^\circ - \theta)$
- $\sec \theta = \csc (90^\circ - \theta)$
- $\csc \theta = \sec (90^\circ - \theta)$
- $\cot \theta = \tan (90^\circ - \theta)$

Contoh 4

Diberi bahawa $\sin 77^\circ = 0.9744$ dan $\cos 77^\circ = 0.225$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\cos 13^\circ$ (b) $\operatorname{cosec} 13^\circ$ (c) $\cot 13^\circ$ **Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos 13^\circ &= \sin (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \sin 77^\circ \\ &= 0.9744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \operatorname{cosec} 13^\circ &= \sec (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \sec 77^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 77^\circ} \\ &= \frac{1}{0.225} \\ &= 4.444 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \cot 13^\circ &= \tan (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \tan 77^\circ \\ &= \frac{\sin 77^\circ}{\cos 77^\circ} \\ &= \frac{0.9744}{0.225} \\ &= 4.331 \end{aligned}$$

Contoh 5

Diberi $\cos 63^\circ = k$, dengan keadaan $k > 0$. Cari nilai bagi setiap yang berikut dalam sebutan k .

(a) $\sin 63^\circ$ (b) $\sin 27^\circ$ (c) $\operatorname{cosec} 27^\circ$ **Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{(a) } \sin 63^\circ &= \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(b) } \sin 27^\circ &= \cos (90^\circ - 27^\circ) \\ &= \cos 63^\circ \\ &= k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \operatorname{cosec} 27^\circ &= \sec (90^\circ - 27^\circ) \\ &= \sec 63^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 63^\circ} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Latihan Kendiri 6.2

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak PQR . Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\cot R$ (b) $\sin^2 R$ (c) $\frac{\cos R - \sin R}{\operatorname{cosec} R}$

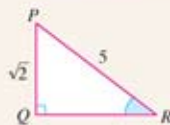
2. Diberi $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ dan α ialah sudut tirus, cari

(a) $\sin \alpha$ (b) $\cos^2 \alpha$ (c) $\cot \alpha$ (d) $\operatorname{cosec} \alpha$ (e) $\frac{4 - \sec^2 \alpha}{2 - \sec \alpha}$

3. Cari sudut pelengkap bagi setiap yang berikut.

(a) 54° (b) $5^\circ 17' 14''$ (c) $\frac{\pi}{5}$ rad

4. Diberi $\cos 33^\circ = 0.839$ dan $\sin 33^\circ = 0.545$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\sin 57^\circ$ (b) $\tan 57^\circ$ (c) $\sec 57^\circ$ 



Menentukan nilai nisbah trigonometri bagi sebarang sudut

Nilai nisbah trigonometri bagi sebarang sudut boleh diperoleh dengan menggunakan kalkulator atau perisian geometri dinamik yang lain. Walau bagaimanapun, terdapat beberapa kaedah lain untuk menentukan nisbah trigonometri.

Kaedah 1: Menggunakan kalkulator

Nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sebarang sudut boleh ditentukan menggunakan kalkulator. Walau bagaimanapun, nilai bagi kosekan, sekatan dan kotangen perlu dihitung menggunakan saling kepada nilai nisbah trigonometri sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut.



Sudut Informasi

Penggunaan kekunci bergantung kepada model kalkulator yang digunakan.

Contoh 6

Dengan menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap nisbah trigonometri yang berikut, betul kepada empat angka bererti.

- (a) $\sin (-215^\circ 12')$ (b) $\sec (-4.14 \text{ rad})$

Penyelesaian

- (a) 0.5764 (b) $\sec (-4.14 \text{ rad})$

$$= \frac{1}{\cos (-4.14)}$$

$$= -1.846$$



PERBINCANGAN

Bincangkan cara untuk mencari nisbah trigonometri bagi sudut dalam unit radian.

Kaedah 2: Menggunakan bulatan unit

Contoh 7

Dengan menggunakan bulatan unit di sebelah, nyatakan nilai bagi setiap yang berikut.

- (a) $\cos 135^\circ$ (b) $\csc \left(-\frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$

Penyelesaian

- (a) Koordinat yang sepadan dengan 135° ialah $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dan $\cos 135^\circ = \text{koordinat-}x$.

$$\text{Maka, } \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- (b) Koordinat yang sepadan dengan $-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ialah $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dan

$$\csc \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\text{koordinat-}y}.$$

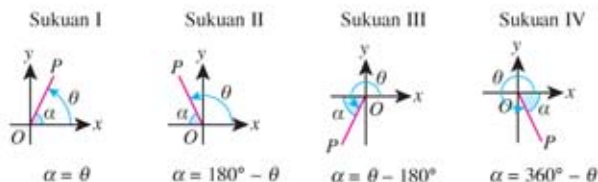
$$\text{Maka, } \csc \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$



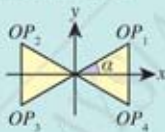
Kaedah 3: Menggunakan nilai nisbah trigonometri sudut rujukan yang sepadan

Nilai nisbah trigonometri untuk sebarang sudut juga boleh ditentukan menggunakan nilai nisbah trigonometri bagi sudut rujukan yang sepadan dengan sudut itu.

Rajah di bawah menunjukkan sudut rujukan, α bagi sudut $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ atau $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

**Sudut Informasi**

Sudut rujukan, α ialah sudut tirus yang dibuat oleh OP dengan paksi- x dalam satah Cartes.



Tanda bagi nisbah trigonometri dalam sukuan I, II, III dan IV boleh ditentukan menggunakan koordinat pada bulatan unit seperti yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

Sukuan	Tanda bagi							
	x	y	$\sin \theta = \frac{y}{r}$	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$	$\text{kosek } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\text{sek } \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\text{kot } \theta = \frac{x}{y}$
I	+	+	+	+	+	+	+	+
II	-	+	+	-	-	+	-	-
III	-	-	-	-	+	-	-	+
IV	+	-	-	+	-	-	+	-

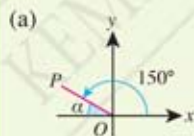
Kesimpulannya, tanda setiap nisbah trigonometri bagi sudut dalam sukuan berbeza adalah seperti dalam rajah di sebelah.

Contoh 8

Diberi $\sin 30^\circ = 0.5$ dan $\cos 30^\circ = 0.866$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

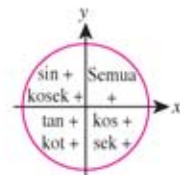
(a) $\text{sek } 150^\circ$

(b) $\text{sek } \left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

Penyelesaian

$\theta = 150^\circ$ terletak pada Sukuan II.
Tanda $\text{sek } 150^\circ$ adalah negatif.
Sudut rujukan, $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

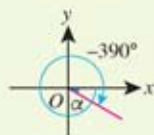
$$\begin{aligned}\text{sek } 150^\circ &= -\text{sek } 30^\circ \\ &= -\frac{1}{\cos 30^\circ} \\ &= -\frac{1}{0.866} \\ &= -1.155\end{aligned}$$

**Tip Pintar**

Langkah-langkah untuk menentukan nisbah trigonometri tanpa menggunakan kalkulator.

1. Tentukan kedudukan sudut pada sukuan.
2. Tentukan tanda bagi nisbah trigonometri.
3. Tentukan sudut rujukan yang sepadan.
4. Gunakan nilai nisbah trigonometri sudut rujukan tersebut.

$$(b) \theta = -\frac{13}{6}\pi \times \frac{180}{\pi} = -390^\circ$$



-390° terletak pada sukuan IV. Tanda bagi sek (-390°) adalah positif.

Sudut rujukan,

$$\alpha = 390^\circ - 360^\circ = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \sec\left(-\frac{13}{6}\pi\right) &= \sec(-390^\circ) \\ &= \sec 30^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{1}{0.866} \\ &= 1.155 \end{aligned}$$

Kuiz Pantas

Lengkapkan nilai nisbah trigonometri bagi sudut negatif yang berikut seperti contoh yang diberi.

$\sin(-A)$	$-\sin A$
$\cos(-A)$	
$\tan(-A)$	
$\cot(-A)$	
$\sec(-A)$	
$\csc(-A)$	

Contoh 9

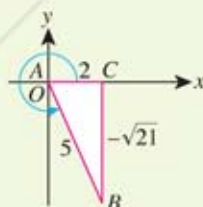
Diberi $\cos A = \frac{2}{5}$ dan $270^\circ \leq A \leq 360^\circ$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

- (a) $\tan A$ (b) $\sin A$ (c) $\sec A$

Penyelesaian

$$BC = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

- (a) $\tan A = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ (b) $\sin A = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ (c) $\sec A = \frac{5}{2}$



Kaedah 4: Menggunakan segi tiga bersudut tegak

Nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas 30° , 45° dan 60° boleh ditentukan menggunakan segi tiga bersudut tegak. Mari teroka dengan lebih lanjut lagi.

Aktiviti Penerokaan

3

Berkumpulan PAK-21

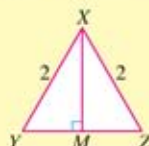
Tujuan: Menentukan nisbah trigonometri sudut-sudut khas menggunakan segi tiga bersudut tegak

Langkah:

- Rajah 6.3 menunjukkan sebuah segi empat sama manakala Rajah 6.4 menunjukkan sebuah segi tiga sama sisi. Lukis semula Rajah 6.3 dan Rajah 6.4 pada sehelai kertas.



Rajah 6.3



Rajah 6.4

- Kemudian, tentukan nilai bagi setiap yang berikut.

- (a) AC (b) YM (c) XM (d) $\angle ACB$ (e) $\angle XYZ$ (f) $\angle MXZ$

3. Berdasarkan Rajah 6.3 atau Rajah 6.4, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Sudut \ Nisbah	sin	kos	tan	kosek	sek	kot
30°	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2		
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$			$\sqrt{2}$	
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				

4. Bincangkan dan bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, didapati bahawa nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas, iaitu 30°, 45° dan 60° adalah seperti yang berikut:

Nisbah		sin	kos	tan	kosek	sek	kot
Sudut							
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Sudut Informasi

Selain sudut 30°, 45° dan 60°, sudut 0°, 90°, 180°, 270° dan 360° juga dikenali sebagai sudut khas.

BAB

6

Contoh 10

Dengan menggunakan nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas, cari nilai bagi setiap yang berikut.

- (a) $\cos 315^\circ$ (b) $\cot \left(\frac{5}{3}\pi\right)$ (c) $\sec(-480^\circ)$

Penyelesaian

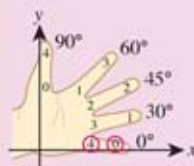
$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 315^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \cot\left(\frac{5}{3}\pi\right) &= \cot 300^\circ \\ &= -\cot(360^\circ - 300^\circ) \\ &= -\cot 60^\circ \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \sec(-480^\circ) &= \sec(-480^\circ - (-360^\circ)) \\ &= \sec(-120^\circ) \\ &= -\sec 60^\circ \\ &= -2 \end{aligned}$$

Tip Pintar

Anda boleh menggunakan jari anda untuk menghafal nisbah trigonometri bagi sudut khas.



$$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$

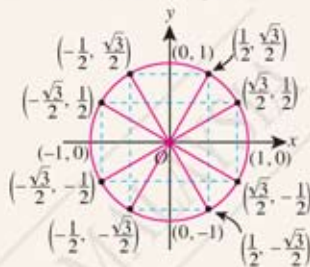
$$\cos 0^\circ = \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut menggunakan kalkulator. Berikan jawapan anda betul kepada empat tempat perpuluhan.

(a) $\tan 165.7^\circ$ (b) $\cot(-555^\circ)$ (c) $\operatorname{kosek}^2(-1.2 \text{ rad})$ (d) $\operatorname{sek}\left(-\frac{16}{9}\pi\right)$

2. Dengan menggunakan bulatan unit di sebelah, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\sin 330^\circ$ (b) $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)$
 (c) $\cot\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ (d) $\cos 600^\circ$
 (e) $\operatorname{kosek}\left(-\frac{7}{2}\pi\right)$ (f) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sek} 3\pi$



3. Cari sudut tirus yang sepadan dengan sudut-sudut yang berikut.

(a) 335° (b) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ (c) $\frac{7}{3}\pi \text{ rad}$ (d) 710°

4. Dengan menggunakan nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\operatorname{sek} 150^\circ$ (b) $\operatorname{kosek} 240^\circ$ (c) $\cot 315^\circ$
 (d) $\sin 45^\circ + \cos 225^\circ$ (e) $\operatorname{sek} 60^\circ + 2 \operatorname{kosek} 30^\circ$ (f) $\operatorname{sek} \pi + \cos \frac{\pi}{2}$

Latihan Formatif 6.2

Kuiz

bit.ly/2Q2zya4



1. Diberi $\tan x = 3t$ bagi $0^\circ < x < 90^\circ$, ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan t .

(a) $\cot x$ (b) $\operatorname{sek}(90^\circ - x)$ (c) $\operatorname{kosek}(180^\circ - x)$

2. Sudut θ terletak dalam sukuan III dan $\tan \theta = 3$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\cot \theta$ (b) $\tan(\pi + \theta)$ (c) $\sin(-\theta)$

3. Dengan menggunakan nisbah trigonometri sudut-sudut khas, cari

(a) $2 \sin 45^\circ + \cos 585^\circ$ (b) $\tan 210^\circ - \cot(-240^\circ)$
 (c) $\operatorname{kosek} \frac{5}{6}\pi + \sin \frac{1}{6}\pi$ (d) $\tan 2\pi - 6 \operatorname{kosek} \frac{3}{2}\pi$

4. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\sin 137^\circ$ jika $\sin 43^\circ \approx 0.6820$ (b) $\operatorname{sek} 24^\circ$ jika $\operatorname{sek} 336^\circ \approx 1.095$
 (c) $\tan 224^\circ$ jika $\tan 44^\circ \approx 0.9656$ (d) $\cot 15^\circ$ jika $\cot 195^\circ \approx 3.732$

5. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan unit yang mewakili sudut 135° . Berdasarkan maklumat dalam bulatan unit tersebut, nyatakan nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\sin 135^\circ$ (b) $\operatorname{sek} 135^\circ$
 (c) $\cot 45^\circ$ (d) $\operatorname{kosek}(-45^\circ)$



6.3 Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen

Rajah di sebelah menunjukkan ritma degupan jantung seorang individu yang normal. Ritma ini dikenali sebagai *Normal Sinus Rhythm*. Perhatikan bahawa bentuk ritma yang terhasil merupakan satu contoh graf fungsi trigonometri.



Graf bagi fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$, dengan keadaan a , b dan c ialah pemalar dan $b > 0$ boleh dilukis menggunakan sebarang perisian geometri dinamik atau dilukis secara manual menggunakan jadual dan kertas graf.



Graf bagi fungsi trigonometri

Aktiviti Penerokaan

4

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Melukis dan mengenal pasti ciri-ciri graf fungsi sinus, kosinus dan tangen

Langkah:

1. Bentukkan tiga buah kumpulan.
2. Seterusnya, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

x°	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$y = \sin x$													
$y = \cos x$													
$y = \tan x$													

3. Dengan menggunakan kertas graf atau sebarang perisian geometri dinamik, lukis graf yang berikut.

Kumpulan I: $y = \sin x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.

Kumpulan II: $y = \cos x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.

Kumpulan III: $y = \tan x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.

4. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Pintasan- y	Pintasan- x	Nilai maksimum bagi y	Nilai minimum bagi y	Amplitud	Kala

5. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan daripada kumpulan masing-masing di hadapan kelas.
6. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanya soalan kepada wakil yang dilantik.
7. Ulang langkah 5 dan 6 sehingga semua kumpulan selesai melakukan pembentangan.

Hasil daripada Aktiviti Pencerakaan 4, didapati bahawa:

- Graf $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ berbentuk sinusoidal dan mempunyai ciri-ciri yang berikut:

- Nilai maksimum ialah 1 manakala nilai minimum ialah -1 , maka amplitud graf ialah 1 unit.
- Bentuk graf berulang setiap selang 360° atau 2π rad, maka 360° atau 2π rad ialah kala bagi kedua-dua graf itu.



- Graf $y = \tan x$ pula tidak berbentuk sinusoidal. Ciri-ciri graf $y = \tan x$ adalah seperti yang berikut:

- Graf ini tidak mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum.
- Bentuk graf berulang setiap selang 180° atau π rad, maka kala bagi graf tangen ialah 180° atau π rad.
- Fungsi $y = \tan x$ tidak tertakrif pada $x = 90^\circ$ dan $x = 270^\circ$. Lengkung graf menghampiri garis $x = 90^\circ$ dan $x = 270^\circ$ tetapi tidak menyentuh garis tersebut. Garis tersebut dinamakan sebagai asimptot.



PERBINCANGAN

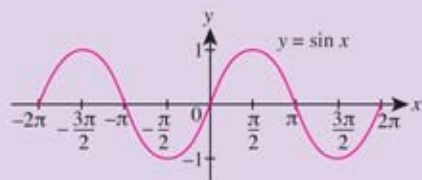
Bincangkan maksud

- amplitud
- kala
- kitaran
- asimptot

Graf bagi ketiga-tiga fungsi tersebut akan berulang walaupun dilukis dengan domain x yang lebih besar. Perhatikan graf yang berikut.

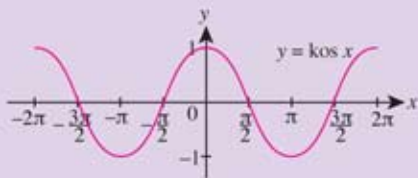
- Graf $y = \sin x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- Amplitud = 1
 - Nilai maksimum $y = 1$
 - Nilai minimum $y = -1$
- Kala = 360° atau 2π
- Pintasan- x : $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$
- Pintasan- y : 0



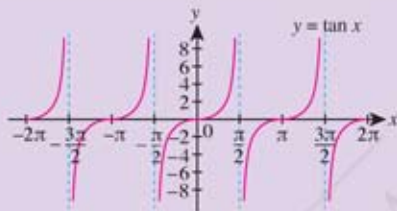
- Graf $y = \cos x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- Amplitud = 1
 - Nilai maksimum $y = 1$
 - Nilai minimum $y = -1$
- Kala = 360° atau 2π
- Pintasan- x : $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$
- Pintasan- y : 1



3 Graf $y = \tan x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- (a) Tiada amplitud
 (i) Tiada nilai maksimum y
 (ii) Tiada nilai minimum y
 (b) Kala = 180° atau π
 (c) Asimptot- x : $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$
 (d) Pintasan- x : $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$
 (e) Pintasan- y : 0



Dalam Aktiviti Penerokaan 5, anda akan mengkaji kesan transformasi yang berbeza ke atas graf $y = a \sin bx + c$, $a \neq 0$ dan $b > 0$.

Aktiviti Penerokaan 5

Berkumpulan

PAK-21

STEM

PK

Tujuan: Membanding graf fungsi sinus yang mempunyai bentuk persamaan berbeza

Langkah:

1. Salin dan lengkapkan jadual berikut.

x°	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$y = \sin x$													
$y = 3 \sin x$													
$y = 3 \sin 2x$													
$y = 3 \sin 2x + 1$													

2. Dengan menggunakan kertas graf atau sebarang perisian geometri dinamik, lukis setiap pasangan fungsi yang berikut pada paksi yang sama.
 (a) $y = \sin x$ dan $y = 3 \sin x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (b) $y = \sin x$ dan $y = 3 \sin 2x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (c) $y = \sin x$ dan $y = 3 \sin 2x + 1$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$.
3. Seterusnya, bandingkan setiap pasangan graf tersebut dari segi amplitud, kala dan kedudukan graf.
4. Kemudian, buat kesimpulan mengenai perkaitan antara nilai a , b dan c bagi fungsi $y = a \sin bx + c$, dengan keadaan $a \neq 0$ dan $b > 0$ dengan
 (i) amplitud,
 (ii) kala,
 (iii) kedudukan graf fungsi tersebut.
5. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan kumpulan masing-masing di hadapan kelas.
6. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanya soalan kepada wakil yang dilantik.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa perubahan nilai-nilai a , b dan c dalam fungsi $y = a \sin bx + c$ memberi kesan kepada amplitud, kala dan kedudukan graf.

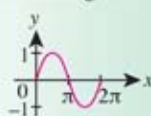
$$y = a \sin bx + c$$

a

- Jika $c = 0$:
Amplitud = $|a|$, Nilai maksimum $y = a$, Nilai minimum $y = -a$
- Jika $c \neq 0$:
Amplitud = $|a|$ atau
$$\frac{(\text{nilai maksimum} - \text{nilai minimum})}{2}$$

sin

Bentuk graf:



b

- Bilangan kitaran dalam julat
 $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
atau $0 \leq x \leq 2\pi$
- Kala = $\frac{360^\circ}{b}$
 $= \frac{2}{b}\pi$

c

Translasi
 $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$
dari graf
asas.

Transformasi yang serupa boleh dilakukan ke atas graf $y = \cos x$ dan $y = \tan x$. Didapati bahawa bentuk asal graf tidak berubah. Kesan perubahan nilai a , b dan c ke atas graf dapat disimpulkan seperti dalam jadual yang berikut:

Perubahan	Kesan
a	Nilai maksimum dan minimum graf (kecuali untuk graf $y = \tan x$ yang tiada nilai maksimum atau minimum)
b	Bilangan kitaran dalam julat $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$: - Graf $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ (kala = $\frac{360^\circ}{b}$ atau $\frac{2}{b}\pi$) - Graf $y = \tan x$ (kala = $\frac{180^\circ}{b}$ atau $\frac{1}{b}\pi$)
c	Kedudukan graf merujuk kepada paksi-x berbanding dengan kedudukan graf asas

Setelah mengetahui bentuk dan ciri-ciri graf fungsi trigonometri, dua kemahiran penting yang perlu dikuasai ialah melukis dan melakar graf-graf tersebut.

Akses QR

- Mari teroka graf fungsi $y = a \cos(bx - c) + d$.



ggbm.at/bexuvgge

- Mari teroka graf fungsi $y = k + A \tan(Bx + C)$.



ggbm.at/we9jzcmv

Contoh 11

Lukis graf $y = 3 - 2 \cos \frac{3}{2}x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Penyelesaian

Bagi menentukan saiz selang kelas:

$$b = \frac{3}{2}, \text{ Kala} = 2\pi \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}\pi$$

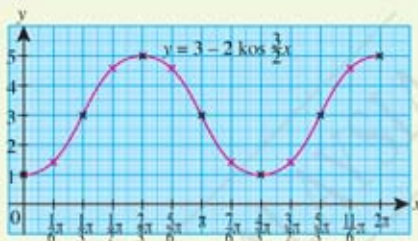
$$\begin{aligned} \text{Saiz selang kelas} &= \left(\frac{4}{3}\pi\right) \div 8 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Tip Pintar

Bagi melukis graf fungsi trigonometri, kita memerlukan sekurang-kurangnya lapan titik untuk satu kitaran.

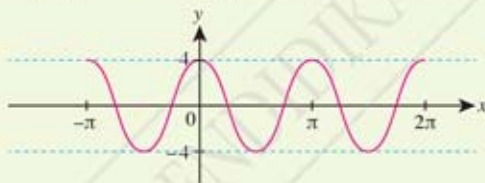
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$y = 3 - 2 \cos \frac{3}{2}x$	1	1.59	3	4.41	5	4.4	3	1.59	1	1.59	3	4.41	5

Graf $y = 2 \cos \frac{3}{2}x$ dipantulkan pada paksi- x dan diikuti dengan translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Contoh 12

Nyatakan fungsi kosinus yang diwakili oleh graf dalam rajah di bawah.



Penyelesaian

Perhatikan bahawa amplitud ialah 4.

Jadi, $a = 4$.

Dua kitaran dalam julat $0 \leq x \leq 2\pi$.

Kala ialah π , iaitu $\frac{2\pi}{b} = \pi$, jadi $b = 2$.

Maka, graf mewakili $y = 4 \cos 2x$

Selain mengenal pasti fungsi trigonometri daripada graf yang diberi, nilai-nilai pemalar a , b dan c juga membantu dalam melakar graf apabila diberi suatu fungsi trigonometri.

Contoh 13

Diberi $f(x) = 3 \sin 2x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

- Nyatakan kala bagi graf fungsi $y = f(x)$. Seterusnya, nyatakan bilangan kitaran graf dalam julat tersebut.
- Nyatakan amplitud bagi graf tersebut.
- Tuliskan koordinat bagi titik maksimum dan titik minimum.
- Lakarkan graf fungsi $y = f(x)$.
- Pada paksi yang sama, lakarkan graf fungsi $y = -3 \sin 2x$.

Penyelesaian

- (a) Kala bagi graf fungsi $y = f(x)$ ialah $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.
 Bilangan kitaran ialah 2.
 (b) Amplitud bagi graf ialah 3.
 (c) Titik maksimum ialah $(45^\circ, 3)$ dan $(225^\circ, 3)$ manakala titik minimum ialah $(135^\circ, -3)$ dan $(315^\circ, -3)$.
 (d) Bagi melakar graf fungsi $y = 3 \sin 2x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:
 Bilangan kelas = $2 \times 2 \times 2$

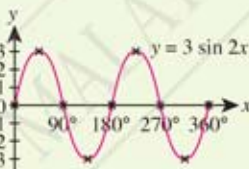
$$= 8$$

$$\text{Saiz selang kelas} = \frac{360^\circ}{8}$$

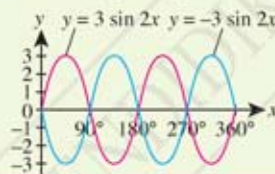
$$= 45^\circ$$

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

Plotkan titik: $(0^\circ, 0)$, $(45^\circ, 3)$, $(90^\circ, 0)$, $(135^\circ, -3)$, $(180^\circ, 0)$, $(225^\circ, 3)$, $(270^\circ, 0)$, $(315^\circ, -3)$, $(360^\circ, 0)$



- (e) Lakaran graf fungsi $y = -3 \sin 2x$ merupakan pantulan graf $y = 3 \sin 2x$ pada paksi-x.



Contoh 14

Nyatakan transformasi bagi graf fungsi $y = \tan x$ untuk mendapatkan graf bagi setiap yang berikut.

(a) $y = |-\tan x|$

(b) $y = -|\tan x|$

Seterusnya, lakarkan kedua-dua graf tersebut untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Penyelesaian

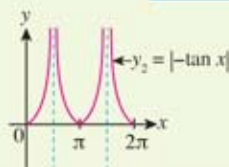
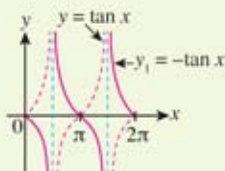
Kala = π rad

- (a) Pantulan graf $y = \tan x$ pada paksi-x memberikan graf $y_1 = -\tan x$ diikuti dengan pantulan bahagian negatif graf $y_1 = -\tan x$ pada paksi-x untuk mendapatkan graf $y_2 = |-\tan x|$.

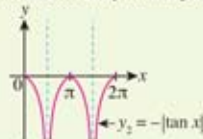
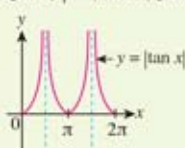


Imbas Kembali

Kala bagi graf $y = \tan x$ ialah 180° atau π rad.



- (b) Pantulan bahagian negatif graf $y = \tan x$ pada paksi- x memberikan graf $y_1 = |\tan x|$ diikuti dengan pantulan graf $y_1 = |\tan x|$ pada paksi- x untuk mendapatkan graf $y_2 = -|\tan x|$.

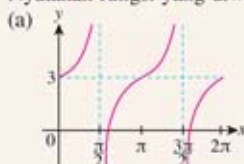


Latihan Kendiri 6.4

1. Lakarkan graf bagi setiap fungsi yang berikut pada kertas graf. Seterusnya, semak graf anda menggunakan perisian geometri dinamik.

(a) $y = 1 - 3 \sin 2x$ untuk $-90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ (b) $f(x) = -|\tan 2x| + 1$ untuk $0 \leq x \leq \pi$

2. Nyatakan fungsi yang diwakili oleh setiap graf yang berikut.



3. Diberi $f(x) = A \sin Bx + C$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Amplitud bagi graf itu ialah 3, kala ialah 90° dan nilai minimum bagi $f(x)$ ialah -2 .

(a) Nyatakan nilai A , B dan C .

(b) Lakarkan graf bagi fungsi tersebut.

4. Salin dan lengkapkan jadual berikut.



Fungsi	Amplitud	Bilangan kitaran/Kala	Translasi	Lakaran graf $0 \leq x \leq \pi$
$y = \frac{3}{2} \sin 3x$				
$y = \tan 2x + 1$				



Menyelesaikan persamaan trigonometri dengan kaedah graf

Penyelesaian bagi suatu persamaan trigonometri dapat ditentukan dengan melukis dua graf yang diperoleh daripada persamaan trigonometri itu pada rajah yang sama. Penyelesaian tersebut ialah nilai x bagi koordinat titik persilangan kedua-dua graf tersebut.

Contoh 15

Pada paksi yang sama, lukis graf $y = \sin 2x$ dan $y = \frac{x}{2\pi}$ dalam julat $0 \leq x \leq \pi$. Seterusnya, nyatakan penyelesaian bagi persamaan trigonometri $2\pi \sin 2x - x = 0$.

Penyelesaian

Bagi fungsi $y = \sin 2x$:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0

Julat = π
Saiz selang kelas = $\frac{\pi}{8}$

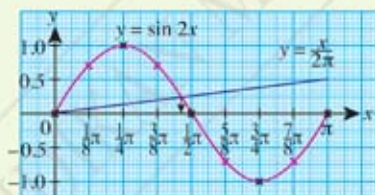
Bagi garis lurus $y = \frac{x}{2\pi}$:

x	0	π
y	0	0.5
Titik	(0, 0)	(π , 0.5)

Graf $y = \sin 2x$ dan $y = \frac{x}{2\pi}$:

Titik persilangan kedua-dua graf ialah penyelesaian kepada $\sin 2x = \frac{x}{2\pi}$ atau $2\pi \sin 2x - x = 0$

Daripada graf, didapati bahawa penyelesaian bagi persamaan $2\pi \sin 2x - x = 0$ ialah 0 dan 0.46π .



Bilangan penyelesaian bagi suatu persamaan trigonometri boleh ditentukan dengan hanya melakar graf bagi fungsi yang terlibat pada paksi yang sama. Bilangan titik persilangan akan memberikan bilangan penyelesaian bagi persamaan tersebut.

Contoh 16

Lakarkan graf $y = 3 \cos 2x + 2$ bagi $0 \leq x \leq \pi$. Seterusnya, tentukan bilangan penyelesaian bagi persamaan trigonometri berikut.

(a) $3x \cos 2x = \pi - 2x$

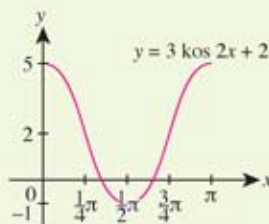
(b) $3\pi \cos 2x = 8x - \pi$

Penyelesaian

Diberi $y = 3 \cos 2x + 2$

Bilangan kelas = $(2 \times 1) \times 2 = 4$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	5	2	-1	2	5



- (a) Untuk menentukan bilangan penyelesaian bagi
- $3x \cos 2x = \pi - 2x$
- ,

$$3x \cos 2x + 2x = \pi$$

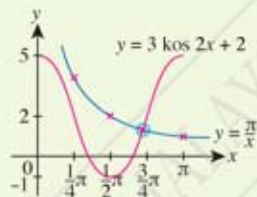
$$x(3 \cos 2x + 2) = \pi$$

$$3 \cos 2x + 2 = \frac{\pi}{x}$$

$$\text{Jadi, } y = 3 \cos 2x + 2 \text{ dan } y = \frac{\pi}{x}.$$

$$\text{Bagi } y = \frac{\pi}{x}:$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	∞	4	2	1
Titik	-	$(\frac{\pi}{4}, 4)$	$(\frac{\pi}{2}, 2)$	$(\pi, 1)$



Maka, bilangan penyelesaian = 1.

- (b) Untuk menentukan bilangan penyelesaian bagi
- $3\pi \cos 2x = 8x - \pi$
- .

$$3\pi \cos 2x + \pi = 8x$$

$$\pi(3 \cos 2x + 1) = 8x$$

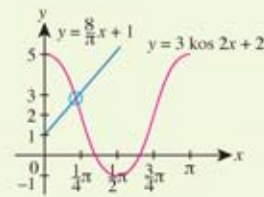
$$3 \cos 2x + 1 = \frac{8x}{\pi}$$

$$3 \cos 2x + 1 + 1 = \frac{8x}{\pi} + 1$$

$$\text{Jadi, } y = 3 \cos 2x + 2 \text{ dan } y = \frac{8x}{\pi} + 1$$

$$\text{Bagi } y = \frac{8x}{\pi} + 1:$$

x	0	$\frac{1}{4}\pi$
y	1	3
Titik	$(0, 1)$	$(\frac{1}{4}\pi, 3)$



Maka, bilangan penyelesaian = 1.



Hanya dua titik sahaja diperlukan untuk melakar graf fungsi linear.

Latihan Kendiri 6.5

1. Dengan menggunakan skala yang bersesuaian,

- (a) lukiskan graf yang berikut bagi
- $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
- .

(i) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

(ii) $y = 2 - \cos x$

(iii) $y = -\tan 2x + 1$

- (b) lukiskan graf yang berikut bagi
- $0 \leq x \leq 2\pi$
- .

(i) $y = 3 \cos 2x$

(ii) $y = -3 \sin x + 2$

(iii) $y = |\tan x| - 1$

2. Lakarkan graf fungsi
- $y = -2|\sin 2x| + 1$
- bagi
- $0 \leq x \leq 2\pi$
- .

3. Pada paksi yang sama, lakarkan graf fungsi $y = \frac{3}{2} \cos 3x$ dan $y = \frac{x}{\pi} + 1$ bagi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 Seterusnya, nyatakan bilangan penyelesaian untuk $3 \cos 3x = \frac{2x}{\pi} + 2$ bagi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
4. Tentukan bilangan penyelesaian bagi $x - 2\pi |\cos 2x| = 0$ untuk $0 \leq x \leq \pi$ dengan melakarkan dua graf yang bersesuaian.

Latihan Formatif

6.3

Kuiz

bit.ly/37k9eON



1. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- x dan paksi- y , lukis graf $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$ bagi $0 \leq x \leq 4$. Daripada graf yang diperoleh, anggarkan nilai-nilai x yang memuaskan persamaan $\cos \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ bagi julat $0 \leq x \leq 4$.
2. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada $\frac{\pi}{6}$ rad pada paksi- x dan 1 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf $y = 5 \tan x$ bagi $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$. Pada paksi yang sama, lukis garis lurus yang bersesuaian untuk menyelesaikan persamaan $30 \tan x - 6x + 5\pi = 0$ bagi julat $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$. Seterusnya, cari nilai x dalam unit radian.
3. Lakarkan graf $y = 3 \sin 2x$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$. Seterusnya, menggunakan paksi-paksi yang sama, lukis garis lurus yang bersesuaian untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $3\pi \sin 2x + 2x = 3\pi$. Nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.
4. Lakarkan graf $y = |\cos 2x|$ bagi $0 \leq x \leq \pi$. Pada paksi yang sama, lakarkan garis lurus yang bersesuaian untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $x - 2\pi |\cos 2x| = 0$. Seterusnya, nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.
5. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada $\frac{\pi}{4}$ rad pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi trigonometri $y = 1 + \sin 2x$ dan $y = |2 \cos 2x|$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$ pada paksi yang sama. Seterusnya, nyatakan koordinat titik-titik persilangan bagi kedua-dua graf itu.
6. Dengan melakarkan graf $y = 3 + |\cos x|$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$, cari julat nilai k dengan keadaan $|\cos x| = k - 3$ tidak mempunyai punca nyata.
7. (a) Lakarkan graf $y = -2 \cos \frac{3x}{2}$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (b) Seterusnya, dengan menggunakan paksi yang sama, lakarkan satu graf yang bersesuaian untuk menyelesaikan persamaan $2 \cos \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2x} = 0$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$. Nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.

6.4 Identiti Asas



Menerbitkan identiti asas

Perhatikan tiga identiti asas yang berikut:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Identiti trigonometri ialah persamaan yang melibatkan fungsi trigonometri dan sah untuk sebarang nilai sudut. Identiti trigonometri yang telah dipelajari adalah seperti berikut:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ dan } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

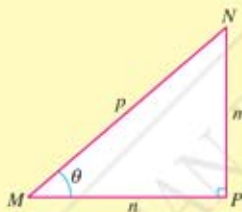
Dengan menggunakan bulatan unit dan segi tiga bersudut tegak, tiga identiti asas lain yang juga dikenali sebagai identiti Pythagoras boleh dibuktikan.

Aktiviti Penerokaan 6

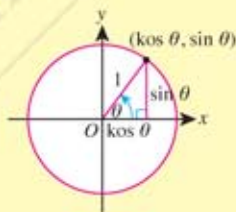
Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menerbitkan identiti asas

1. Bahagikan murid kepada dua kumpulan.
2. Kumpulan 1 akan mengkaji berkaitan Rajah 6.5 dan Kumpulan 2 akan mengkaji berkaitan Rajah 6.6.



Rajah 6.5

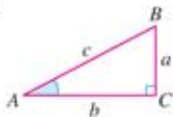


Rajah 6.6

Kumpulan 1	Kumpulan 2
(a) Senaraikan enam nisbah trigonometri dalam sebutan n , m dan p .	(a) Tuliskan x dalam sebutan $\cos \theta$ dan y dalam sebutan $\sin \theta$.
(b) Menggunakan teorem Pythagoras $m^2 + n^2 = p^2$, terbitkan tiga identiti asas.	(b) Menggunakan teorem Pythagoras $x^2 + y^2 = 1$, terbitkan tiga identiti asas.

3. Bincangkan dalam kumpulan dan bentangkan hasil dapatan anda di hadapan kelas.

Daripada Aktiviti Penerokaan 6, didapati bahawa ketiga-tiga identiti asas boleh diterbitkan menggunakan segi tiga bersudut tegak ABC dan semua nisbah trigonometri yang telah dipelajari.



- $\sin A = \frac{a}{c}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$
- $\cos A = \frac{b}{c}$, $\sec A = \frac{c}{b}$
- $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$

Dengan menggunakan teorem Pythagoras, diketahui bahawa $a^2 + b^2 = c^2$. Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan a^2 , b^2 dan c^2 , kita peroleh:

$$\begin{aligned} \div a^2 \\ \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} &= \frac{c^2}{a^2} \\ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{kosek}^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \div b^2 \\ \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} &= \frac{c^2}{b^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{c}{b}\right)^2 \\ 1 + \tan^2 A &= \operatorname{sek}^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \div c^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= \frac{c^2}{c^2} \\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \end{aligned}$$

Ketiga-tiga identiti asas tersebut boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan nisbah trigonometri.

Contoh 17

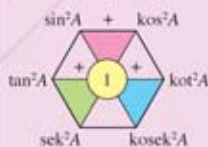
Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

- (a) $\sin^2(-430^\circ) + \cos^2(-430^\circ)$
 (b) $\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Penyelesaian

- (a) $\sin^2(-430^\circ) + \cos^2(-430^\circ) = 1$
 (b) $\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

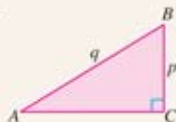
Tip Pintar



$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{kosek}^2 A \end{aligned}$$

Latihan Kendiri 6.6

- Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.
 - $\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ$
 - $\sec^2 173^\circ - \tan^2 173^\circ$
 - $1 - \cos^2 45^\circ$
 - $\operatorname{kosek}^2 \frac{8}{5}\pi - \cot^2 \frac{8}{5}\pi$
- Diberi $\cos \theta = m$, tentukan nilai yang berikut dalam sebutan m .
 - $\sec^2 \theta$
 - $\sin^2 \theta$
 - $\cot^2 \theta$
- Diberi bahawa $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dan $\tan \theta = 3$. Tanpa menggunakan segi tiga bersudut tegak, cari nilai $\sin \theta$ dan $\cos \theta$.
- Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak ABC . Tulis ungkapan yang berikut dalam sebutan p dan/atau q .
 - $1 - \cos^2 A$
 - $\operatorname{kosek}^2 A - 1$
 - $1 - \sec^2 A$





Membuktikan identiti trigonometri menggunakan identiti asas

Contoh 18

Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.

- (a) $1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$
 (b) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 1 - 2 \sin^2 A &= 1 - 2(1 - \cos^2 A) \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ &= 1 - 2 + 2 \cos^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \end{aligned}$$

Maka, terbukti bahawa $1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \tan A + \cot A &\quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ dan } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ &= \frac{1}{\cos A \sin A} \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A \text{ dan } \frac{1}{\cos A} = \sec A \\ &= \sec A \operatorname{cosec} A \end{aligned}$$

Maka, terbukti bahawa $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$



Bagi membuktikan identiti trigonometri:

- (a) Buktikan bahagian yang lebih kompleks.
 (b) Tukarkan kepada bentuk nisbah trigonometri asas.
 (c) Darabkan dengan konjugat jika perlu.

Akses QR

Aktiviti menentukan identiti asas dengan menggunakan klinometer.



bit.ly/37tHBTt

Didapati bahawa pembuktian dapat dilakukan dengan meringkaskan ungkapan di sebelah kiri supaya serupa dengan ungkapan di sebelah kanan atau sebaliknya. Pembuktian juga boleh dilakukan dengan meringkaskan ungkapan di sebelah kiri dan ungkapan di sebelah kanan menjadi satu ungkapan yang serupa. Kaedah ini ditunjukkan dalam contoh di bawah.

Contoh 19

Buktikan bahawa $\tan^2 x - \sec^2 x + 2 = \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{Sebelah kiri: } \tan^2 x - \sec^2 x + 2 &= (-1) + 2 \\ &= 1 \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sebelah kanan: } \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \text{ dan } \frac{1}{\tan x} = \cot x \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka, $\tan^2 x - \sec^2 x + 2 = \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$.

Latihan Kendiri 6.7

1. Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.

(a) $3 \sin^2 A - 2 = 1 - 3 \cos^2 A$

(b) $1 + 2 \tan^2 A = \frac{1 - \sin^4 A}{\cos^4 A}$

(c) $\sec A \operatorname{cosec} A - \tan A = \cot A$

(d) $\cos^2 A - \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(e) $\cot^2 \theta - \tan^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - \sec^2 \theta$

(f) $\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} = 1 - \cos \theta$

(g) $\tan^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) = 1$

(h) $\frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \cos \theta + \sin \theta$

Latihan Formatif 6.3

Kuiz

bit.ly/37k9eON



1. Diberi $\sec^2 \theta = p$, cari nilai bagi setiap yang berikut, dalam sebutan p .

(a) $\tan^2 \theta$

(b) $\cos^2 \theta$

(c) $\sin^2 \theta$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\sin^2 100^\circ + \cos^2 100^\circ$

(b) $\tan^2 3 \text{ rad} - \sec^2 3 \text{ rad}$

(c) $1 + \tan^2 120^\circ$

(d) $1 + \cot^2 225^\circ$

3. Buktikan setiap yang berikut.

(a) $\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \sin^2 x$

(b) $5 \sec^2 x + 4 = 9 \sec^2 x - 4 \tan^2 x$

(c) $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$

(d) $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$

4. Persamaan yang berikut adalah benar bagi semua nilai θ .

$$\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec}^2 \theta$$

(a) Buktikan persamaan tersebut.

(b) Seterusnya, cari nilai $\operatorname{cosec}^2 \theta$ jika $\cos \theta = 0.6$.

5. Setiap identiti yang berikut menunjukkan hubungan yang melibatkan $\sec y$. Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\sec y = \sin y \tan y + \cos y$

(b) $\sec y = \frac{\tan y + \cot y}{\operatorname{cosec} y}$

(c) $\sec y = \frac{1 - \sin y}{2 \cos y} + \frac{\cos y}{2 - 2 \sin y}$

6.5 Rumus Sudut Majmuk dan Rumus Sudut Berganda



Membuktikan identiti trigonometri dengan menggunakan rumus sudut majmuk

Pertimbangkan contoh yang berikut:

$$\sin (30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

Walau bagaimanapun, $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 0.5 + 0.866 \neq 1$

Maka, $\sin (30^\circ + 60^\circ) \neq \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$.

Secara amnya, $\sin (A + B) \neq \sin A + \sin B$.

Rumus yang boleh digunakan untuk mencari nisbah trigonometri bagi sudut majmuk adalah seperti yang berikut:

- $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

Rumus di atas dikenali sebagai **rumus sudut majmuk**.
Kalkulator boleh digunakan untuk menentusahkan rumus tersebut.



Sudut Informasi

- Sudut yang berbentuk $(A + B)$ atau $(A - B)$ dikenali sebagai **sudut majmuk**.
- Sudut yang berbentuk $2A$, $3A$, ..., dikenali sebagai **sudut berganda**.



Akses QR

Menerbitkan rumus sudut majmuk.



bit.ly/37kwwUJ

BAB

6

Aktiviti Penerokaan 7 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menentukan rumus sudut majmuk

Langkah:

1. Salin dan lengkapkan jadual di bawah dengan menggunakan kalkulator. Selain 10° dan 20° , anda boleh memilih lima set sebarang nombor yang lain.

A	B	$\sin (A + B)$	$\sin A \cos B$	$\cos A \sin B$	$\sin A \cos B + \cos A \sin B$
10°	20°				

2. Kemudian, bandingkan jawapan yang diperolehi dalam Lajur 3 dan Lajur 6 bagi jadual di atas.
3. Bincangkan hasil perbandingan anda dengan kumpulan yang lain.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 7, didapati bahawa satu daripada rumus sudut majmuk dapat ditentukan, iaitu $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$. Kaedah yang sama boleh digunakan untuk menentukan rumus sudut majmuk yang lain. Kalkulator juga boleh digunakan untuk menentukan contoh-contoh di bawah.

Contoh 20

Cari nilai bagi setiap ungkapan yang berikut dengan menggunakan rumus sudut majmuk. Seterusnya, semak jawapan yang diperoleh menggunakan kalkulator.

(a) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$

(b) $\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(c) $\frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sin(63^\circ + 27^\circ) \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \cos(50^\circ - 20^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \tan(70^\circ - 10^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Membuktikan identiti lain menggunakan rumus sudut majmuk

Rumus sudut majmuk boleh digunakan untuk membuktikan identiti trigonometri yang lain.

Contoh 21

Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\sin(90^\circ + A) = \cos A$

(b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sin(90^\circ + A) \\ &= \sin 90^\circ \cos A + \cos 90^\circ \sin A \\ &= (1) \cos A + (0) \sin A \\ &= \cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(\sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cos x \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Penggunaan rumus sudut majmuk

Mari lihat contoh penggunaan rumus sudut majmuk untuk menyelesaikan beberapa masalah yang melibatkan nisbah trigonometri.

Contoh 22

Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai yang berikut.

- (a) $\sin 105^\circ$ (b) $\tan 15^\circ$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \sin 105^\circ &= \sin (45^\circ + 60^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } \tan 15^\circ &= \tan (60^\circ - 45^\circ) \\
 &= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\
 &= 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$



Imbas Kembali

	sin	kos	tan
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Contoh 23

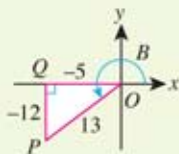
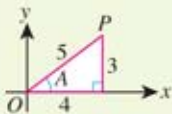
Diberi $\sin A = \frac{3}{5}$, $0^\circ < A < 90^\circ$ dan $\sin B = -\frac{12}{13}$, $90^\circ < B < 270^\circ$. Cari

- (a) $\sin (A + B)$ (b) $\tan (B - A)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \sin (A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
 &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) \\
 &= \frac{-15 - 48}{65} \\
 &= -\frac{63}{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } \tan (B - A) &= \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A} \\
 &= \frac{\left(-\frac{12}{5}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{12}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{48 - 15}{20}\right)}{1 + \left(-\frac{36}{20}\right)} \\
 &= \left(\frac{33}{20}\right) \times \left(\frac{20}{56}\right) \\
 &= \frac{33}{56}
 \end{aligned}$$



Tip Pintar

Berdasarkan rajah dalam Contoh 23:

- $\sin A = \frac{3}{5}$, $\sin B = -\frac{12}{13}$
- $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = -\frac{5}{13}$
- $\tan A = \frac{3}{4}$, $\tan B = -\frac{12}{5}$

Kuiz Pantas

Berdasarkan Contoh 23, tentukan nilai bagi setiap yang berikut:

- (a) $\cos (A + B)$
 (b) $\sec (A - B)$
 (c) $\cot (B - A)$



1. Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.

$$(a) \sin(x-y) - \sin(x+y) = -2 \cos x \sin y \quad (b) \tan\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$(c) \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \tan y \quad (d) \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

$$(a) \cos 75^\circ \quad (b) \operatorname{cosec} 105^\circ \quad (c) \cot 195^\circ$$

3. Diberi $\cos x = -\frac{5}{13}$ bagi $0 < x < \pi$ dan $\sin y = -\frac{3}{5}$ bagi $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3}{2}\pi$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

$$(a) \sin(x+y) \quad (b) \cos(x-y) \quad (c) \cot(x+y)$$



Menerbitkan rumus sudut berganda

Rumus sudut majmuk boleh digunakan untuk menerbitkan rumus sudut berganda.

sin 2A

- Diberi $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- Jika gantikan B dengan A ,
 $\sin(A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$
 Maka, **sin 2A = 2 sin A cos A**

kos 2A

- Diberi $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- Jika gantikan B dengan A ,
 $\cos(A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$
 Maka, **kos 2A = kos² A - sin² A**
- Jika gantikan $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ ke dalam $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$,
 $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$
 $= 2 \cos^2 A - 1$
 Maka, **kos 2A = 2 kos² A - 1**
- Jika gantikan $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ ke dalam $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$,
 $\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$
 $= 1 - 2 \sin^2 A$
 Maka, **kos 2A = 1 - 2 sin² A**

tan 2A

- Diberi $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- Jika gantikan B dengan A ,
 $\tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$
 Maka, **tan 2A = $\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$**

Contoh 24

Cari nilai bagi setiap ungkapan yang berikut menggunakan rumus sudut berganda. Seterusnya, tentusahkan jawapan yang diperoleh menggunakan kalkulator.

(a) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$ (b) $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$ (c) $\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \\
 &= \sin 2(15^\circ) \\
 &= \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \\
 \text{(b)} \quad & \cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ \\
 &= \cos 2(22.5^\circ) \\
 &= \cos (45^\circ) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \text{(c)} \quad & \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ} \\
 &= \tan 2(75^\circ) \\
 &= \tan 150^\circ \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$



Membuktikan identiti trigonometri dengan menggunakan rumus sudut berganda

Contoh 25

Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\operatorname{kosek} 2A = \frac{1}{2} \operatorname{sek} A \operatorname{kosek} A$

(b) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

Penyelesaian

(a) Diberi $\operatorname{kosek} 2A = \frac{1}{2} \operatorname{sek} A \operatorname{kosek} A$

Bukti: Sebelah kiri = $\operatorname{kosek} 2A$

$$= \frac{1}{\sin 2A} \quad \leftarrow \text{Gunakan identiti } \operatorname{kosek} 2A = \frac{1}{\sin 2A}$$

$$= \frac{1}{2 \sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sek} A \operatorname{kosek} A \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Gunakan identiti} \\ \frac{1}{\sin A} = \operatorname{sek} A \text{ dan } \frac{1}{\cos A} = \operatorname{kosek} A \end{array}$$

(b) Diberi $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

Bukti: Sebelah kanan = $\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

$$= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\cos \theta + \sin \theta} \times \frac{(\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)}$$

$$= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}$$

$$= \cos \theta - \sin \theta$$

Gunakan identiti
 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ dan
darabkan dengan konjugat

Rumus lain yang melibatkan sudut berganda boleh diterbitkan secara aruhan. Contohnya, jika $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$, maka rumus $\cos 4A = 2 \cos^2 2A - 1$. Dengan menggunakan kaedah yang sama, didapati bahawa $\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$. Hubungan ini boleh digunakan untuk membuktikan rumus sudut separuh dengan keadaan $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$ dan $\tan \frac{A}{2}$ boleh diungkapkan dalam sebutan $\sin A$ dan $\cos A$ seperti berikut.

$$\bullet \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\bullet \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\bullet \tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin A}{1 + \cos A}}$$

Sudut Informasi

- $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$
- $\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$
 $= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$
- $\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$

Contoh 26

Buktikan bahawa $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Penyelesaian

$$\text{Sebelah kanan} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \tan \frac{x}{2}$$

Gunakan
 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
 maka, $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

Maka, terbukti bahawa $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.



PERBINCANGAN

Buktikan bahawa:

$$\bullet \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\bullet \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\bullet \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

Latihan Kendiri 6.9

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$

(b) $\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ$

(c) $\frac{1 - \tan^2 75^\circ}{2 \tan 75^\circ}$

2. Buktikan bahawa $\csc 2A = \frac{1}{2} \sec A \csc A$.

3. Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\sin 2\theta(\tan \theta + \cot \theta) = 2$

(c) $\operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$

(b) $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x + 1} = \tan 2x$

(d) $\sec 2x = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$

4. Diberi $\sin x = \frac{4}{5}$ dengan x ialah sudut tirus dan $\sin y = \frac{5}{13}$ dengan y ialah sudut cakah, cari

(a) $\operatorname{cosec} 2x$

(b) $\sec 2y$

(c) $\sin \frac{x}{2}$

(d) $\tan \frac{y}{2}$

Latihan Formatif

6.5

Kuiz

bit.ly/2EYagUn



1. Diberi $\tan(A+B) = 3$ dan $\tan B = \frac{1}{3}$, cari nilai bagi $\tan A$.

2. Diberi bahawa $3A = 2A + A$, buktikan setiap yang berikut menggunakan identiti yang bersesuaian.

(a) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(b) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

3. Diberi bahawa $\sin x = \frac{24}{25}$ bagi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ dan $\cos y = \frac{8}{17}$ bagi $\pi \leq y \leq 2\pi$, cari

(a) $\cos(x+y)$

(b) $\operatorname{cosec}(x-y)$

(c) $\tan(x-y)$

(d) $\sec 2y$

(e) $\sin \frac{y}{2}$

4. Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

(b) $\tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x-y) + \sin(x+y)}$

5. Diberi $\tan \theta = t$ bagi $0 \leq \theta \leq \pi$. Ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan t .

(a) $\sin 2\theta$

(b) $\cos 2\theta$

(c) $\tan 2\theta$

(d) $\sin^2 \frac{\theta}{2}$

(e) $\cos^2 \frac{\theta}{2}$

6. Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a) $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

(b) $\sec^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{2}{1 + \cos \theta}$

(c) $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

7. Dengan menggunakan identiti sudut majmuk, tunjukkan bahawa

(a) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$

(b) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$

(c) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$



Menyelesaikan persamaan trigonometri

Pertimbangkan soalan yang berikut:

Diberi $\sin \theta = 0.5$, apakah nilai bagi θ ?

- Nilai bagi θ dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi $\sin^{-1} 0.5$ pada kalkulator, iaitu $\sin^{-1} 0.5 = 30^\circ$.
- Didapati bahawa nilai bagi $\sin 150^\circ$, $\sin 390^\circ$, $\sin 510^\circ$, ... ialah 0.5. Maka, sudut 150° , 390° , 510° , ... juga ialah penyelesaian bagi $\sin \theta = 0.5$.
- Jika julat bagi sudut tidak dinyatakan, maka bilangan penyelesaian bagi suatu persamaan trigonometri adalah tidak terhingga.

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri, pengetahuan tentang identiti trigonometri, sudut rujukan dan tanda bagi nisbah trigonometri dalam suatu sukuan adalah penting.

Contoh 27

Sesahkan persamaan yang berikut bagi $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

(a) $\sin \theta = -0.5446$

(b) $\cos 2\theta = 0.3420$

Penyelesaian

(a) $\sin \theta = -0.5446$

Sudut rujukan, $\alpha = \sin^{-1}(0.5446)$
 $\alpha = 33^\circ$



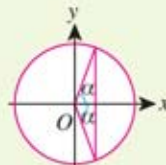
$\sin \theta$ adalah negatif, jadi θ dalam sukuan III dan IV bagi $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

$$\theta = 180^\circ + 33^\circ \text{ dan } 360^\circ - 33^\circ$$

$$= 213^\circ \text{ dan } 327^\circ$$

(b) $\cos 2\theta = 0.3420$

Sudut rujukan, $\alpha = \cos^{-1}(0.3420)$
 $\alpha = 70^\circ$



$\cos 2\theta$ adalah positif, jadi 2θ dalam sukuan I dan IV bagi $0^\circ \leq 2\theta \leq 720^\circ$

$$2\theta = 70^\circ, 360^\circ - 70^\circ, 360^\circ + 70^\circ \text{ dan } 360^\circ + (360^\circ - 70^\circ)$$

$$= 70^\circ, 290^\circ, 430^\circ \text{ dan } 650^\circ$$

$$\theta = 35^\circ, 145^\circ, 215^\circ \text{ dan } 325^\circ$$



Tip Pintar

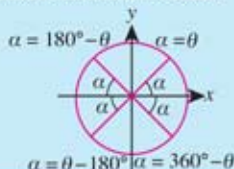
Langkah untuk menyelesaikan persamaan trigonometri:

1. Permudahkan persamaan menggunakan identiti jika perlu.
2. Tentukan sudut rujukan menggunakan nilai nisbah trigonometri tanpa mengambil kira tandanya.
3. Cari sudut dalam sukuan yang merujuk kepada tanda nisbah trigonometri dan julat.
4. Tuliskan penyelesaian yang diperoleh.



Imbas Kembali

Diberi α ialah sudut rujukan dan θ ialah sudut dalam sukuan,



Contoh 28

Seselaikan persamaan $3 \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.99$ bagi $0 \leq A \leq \pi$.

Penyelesaian

$$3 \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.99$$

$$\sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.33$$

$$\text{Sudut rujukan, } \alpha = \sin^{-1}(0.33) \\ = 0.3363 \text{ rad}$$

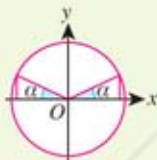
Tukar kalkulator
dalam mod radian

$\sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right)$ adalah positif, jadi $\left(A + \frac{\pi}{3} \right)$ dalam Sukuan I dan II
bagi $\frac{\pi}{3} \leq A + \frac{\pi}{3} \leq 4.189$.

$$A + \frac{\pi}{3} = 0.3363 \text{ dan } \pi - 0.3363$$

$$A = 0.3363 - \frac{\pi}{3} \text{ dan } 2.805 - \frac{\pi}{3} \\ = -0.7109 \text{ dan } 1.758$$

Maka, $A = 1.758 \text{ rad}$.



Tip Pintar

Jika menggunakan
kalkulator dalam mod
darjah: $\sin^{-1}(0.33) = 19.27^\circ$
Tukar ke mod radian:
 $19.27^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$
 $= 0.3363 \text{ rad}$

Contoh 29

Cari nilai x yang tercangkum di antara 0° dengan 360° yang memuaskan persamaan yang berikut.

(a) $\sin 2x + \cos x = 0$

(b) $2 \cos 2x - 13 \sin x + 10 = 0$

Penyelesaian

(a) $\sin 2x + \cos x = 0$

$$2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

Jadi, $\cos x = 0$ atau $2 \sin x + 1 = 0$

Apabila $\cos x = 0$,

$$x = 90^\circ \text{ dan } x = 270^\circ$$

Apabila $2 \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -0.5$$

Sudut rujukan, $\alpha = 30^\circ$

$\sin x$ adalah negatif, jadi x dalam sukuan III atau IV

$$x = 180^\circ + 30^\circ \text{ dan } 360^\circ - 30^\circ$$

$$= 210^\circ \text{ dan } 330^\circ$$

Maka, $x = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ$ dan 330° .

Gunakan identiti
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Kuiz Pantas

Diberi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
Lengkapkan jadual
di bawah.

Nisbah	x
$\sin x = 0$	
$\cos x = 0$	
$\tan x = 0$	
$\sin x = 1$	
$\cos x = 1$	
$\tan x = 1$	
$\sin x = -1$	
$\cos x = -1$	
$\tan x = -1$	

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & 2 \cos 2x - 13 \sin x + 10 = 0 \\
 & 2(1 - 2 \sin^2 x) - 13 \sin x + 10 = 0 \quad \leftarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \\
 & 2 - 4 \sin^2 x - 13 \sin x + 10 = 0 \\
 & 4 \sin^2 x + 13 \sin x - 12 = 0 \\
 & (4 \sin x - 3)(\sin x + 4) = 0
 \end{aligned}$$

$$\sin x = 0.75 \text{ atau } \sin x = -4 \text{ (abaikan)} \quad \leftarrow 0 \leq \sin x \leq 1$$

Apabila $\sin x = 0.75$, sudut rujukan, $\alpha = 48.59^\circ$
 $\sin x$ adalah positif, jadi x dalam sukuan I dan II.
 Maka, $x = 48.59^\circ$ dan 131.41° .

Latihan Kendiri 6.10

- Diberi bahawa $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, cari semua nilai x yang memuaskan setiap persamaan yang berikut.
 - $\sin 2x = -0.4321$
 - sek $(2x + 40^\circ) = 2$
 - $\cot \left(\frac{x}{3} \right) = 0.4452$
 - $5 \tan x = 7 \sin x$
 - $\sin^2 x - 2 \sin x = \cos 2x$
 - $\sin (x + 30^\circ) = \cos (x + 120^\circ)$
 - $7 \sin x + 3 \cos 2x = 0$
 - $\sin x = 3 \sin 2x$
 - $\cos (x - 60^\circ) = 3 \cos (x + 60^\circ)$
- Cari semua sudut yang tercangkum di antara 0 dengan 2π yang memenuhi persamaan yang berikut.
 - $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $3 \sin y = 2 \tan y$
 - $3 \cot^2 z - 5 \csc z + 1 = 0$
 - $\sin 2A - \cos 2A = 0$
 - $\cos B \sin B = \frac{1}{4}$
 - $4 \sin (x - \pi) \cos (x - \pi) = 1$



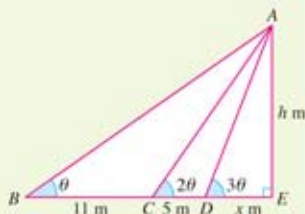
Menyelesaikan masalah yang melibatkan fungsi trigonometri

Pengetahuan tentang fungsi trigonometri sering digunakan untuk menyelesaikan masalah sama ada dalam kehidupan harian atau masalah lain yang melibatkan trigonometri.

Contoh 30

APLIKASI MATEMATIK

Dalam rajah di sebelah, AE mewakili tinggi sebuah bangunan. Sudut dongak puncak A dari titik B , C dan D masing-masing ialah θ , 2θ dan 3θ . Titik B , C , D dan E terletak pada satu garis lurus mengufuk. Diberi $BC = 11$ m dan $CD = 5$ m. Jika $AE = h$ m dan $DE = x$ m, cari tinggi bangunan itu, dalam sebutan x .



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Diberi $BC = 11$ m, $CD = 5$ m, $DE = x$ m dengan sudut θ , 2θ , dan 3θ .
- ◆ Cari tinggi bangunan, $AE = h$ m.

2. Merancang strategi

- ◆ Cari $\tan \theta$, $\tan 2\theta$ dan $\tan 3\theta$, dalam sebutan h dan x .
- ◆ Gunakan identiti $\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$.
- ◆ Gantikan ungkapan bagi $\tan \theta$, $\tan 2\theta$ dan $\tan 3\theta$.
- ◆ Permudahkan persamaan untuk mencari h .

3. Melaksanakan strategi

Didapati bahawa: $\tan \theta = \frac{h}{16+x}$

$$\tan 2\theta = \frac{h}{5+x}$$

$$\tan 3\theta = \frac{h}{x} \text{ dengan } \tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta).$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{x} &= \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{h}{16+x}\right) + \left(\frac{h}{5+x}\right)}{1 - \left(\frac{h}{16+x}\right)\left(\frac{h}{5+x}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{h(5+x) + h(16+x)}{(16+x)(5+x)} \\ &= \frac{(16+x)(5+x) - h^2}{(16+x)(5+x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{h(5+x) + h(16+x)}{(16+x)(5+x) - h^2}$$

$$\text{Jadi, } \frac{1}{x} = \frac{21+2x}{80+21x+x^2-h^2}$$

$$80+21x+x^2-h^2 = x(21+2x)$$

$$80+21x+x^2-h^2 = 21x+2x^2$$

$$h^2 = 80 - x^2$$

$$h = \pm \sqrt{80 - x^2}$$

Maka, tinggi bangunan itu ialah $\sqrt{80 - x^2}$ m.

4. Membuat refleksi

Katakan x ialah 4 m. Jadi, $h = \sqrt{80 - 4^2}$
 $= 8$ m

$$\begin{aligned}\text{Didapati bahawa: } \tan \theta &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned}\tan 3\theta &= \frac{8}{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\tan 3\theta = \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{8}{9}\right)}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{8}{9}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{18 + 40}{45}\right)}{\left(\frac{45 - 16}{45}\right)}$$

$$= \frac{58}{29}$$

$$= 2$$

Latihan Kendiri 6.11

1. Dalam merancang penerbangan, juruterbang pesawat perlu menentukan kelajuan darat, v kmj^{-1} , pesawat itu dengan mengambil kira laju dan arah angin. Kelajuan darat, dalam kmj^{-1} , boleh diungkapkan sebagai

$$v = \frac{770 \sin 135^\circ}{\sin \theta}$$

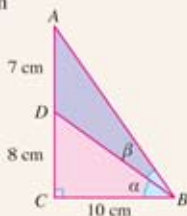
Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai v , jika $\tan \theta = 7$ dan $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

2. Dengan menggunakan identiti $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, cari nilai tepat bagi $\tan A$ jika $\sec^2 A + \tan^2 A = 2$.

3. Elly bercadang untuk menempal kertas hiasan dinding menggunakan teknik kolaj. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga ABC yang terdiri daripada dua jenis kertas warna. Titik D terletak di atas AC , dengan keadaan $AD = 7$ cm, $DC = 8$ cm, $BC = 10$ cm dan $\angle ACB = 90^\circ$. Untuk mengelakkan pembaziran, Elly perlu mendapatkan ukuran yang tepat bagi kepingan kertas warna tersebut. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\tan(\alpha + \beta)$ (b) $\tan \alpha$ (c) $\tan \beta$

Seterusnya, nyatakan nilai α , β , $\angle BAC$, $\angle ADB$, $\angle BDC$, panjang BD dan panjang AB .



Latihan Formatif

6.6

Kuiz

bit.ly/2Q6BzIV



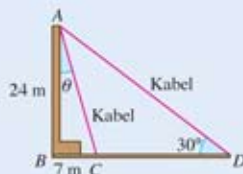
- Selesaikan setiap persamaan trigonometri yang berikut bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
 (a) $2 \cos (x - 10^\circ) = -1$ (b) $\tan^2 x = \sec x + 2$ (c) $3 \sin x + 4 \cos x = 0$
- Diberi $0 \leq A \leq \pi$, selesaikan setiap persamaan yang berikut.
 (a) $\sin 2A = \sin 4A$ (b) $5 \cot^2 A - 4 \cot A = 0$
- Tunjukkan bahawa $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta$ kosek θ . Seterusnya, selesaikan persamaan $\sec \theta$ kosek $\theta = 4 \cot \theta$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
- Jika A, B dan C ialah sudut dalam segi tiga ABC , buktikan bahawa
 (a) $\sin (B + C) = \sin A$, (b) $\cos (B + C) = -\cos A$.



- Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $ABCD$. Sisi AB selari dengan DC dan $\angle BCD = \theta$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.
 (a) $\cos \theta$
 (b) $\sin 2\theta$
 (c) $\tan 2\theta$
 Seterusnya, tentukan nilai θ .

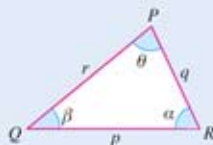


- Sebatang tiang elektrik dikukuhkan oleh dua kabel seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Diberi tinggi tiang, $AB = 24$ m, jarak $BC = 7$ m, $\angle BAC = \theta$ dan $\angle ADB = 30^\circ$.
 (a) Tanpa mencari $\angle CAD$, hitung nilai $\sin \angle CAD$, $\cos \angle CAD$ dan $\tan \angle CAD$.
 (b) Nyatakan panjang bagi kedua-dua kabel itu.



- Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga PQR dengan sisi p, q dan r masing-masing dengan sudut bertentangan θ, β dan α . Tunjukkan bahawa luas segi tiga tersebut diberi oleh rumus yang berikut.

$$L = \frac{p^2 \sin \beta \sin \alpha}{2 \sin (\beta + \alpha)}$$



- Diberi $\sec \theta = t$, dengan keadaan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Cari nilai bagi setiap yang berikut, dalam sebutan t .
 (a) $\sin \theta$ (b) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$ (c) $\tan (\pi - \theta)$



- Lakarkan graf fungsi $f(x) = 1 + |\cos x|$ bagi domain $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (a) Nyatakan julat yang sepadan dengan domain tersebut.
 (b) Seterusnya, dengan melakar graf yang sesuai pada paksi yang sama, nyatakan bilangan penyelesaian bagi $x|\cos x| = 1 - x$.

FUNGSI TRIGONOMETRI

Mewakilkan sudut positif dan sudut negatif dalam satah Cartes.

- Unit darjah dan radian.
- Sudut pada bulatan penuh ialah 360° .

Menentukan nisbah trigonometri bagi sebarang sudut:

- Enam fungsi trigonometri
- Sudut rujukan
- Tanda nisbah trigonometri dalam 4 sukuan



- Melukis dan melakar graf fungsi trigonometri.
- Kesan perubahan a , b dan c pada graf berikut:
 $y = a \sin bx + c$
 $y = a \cos bx + c$
 $y = a \tan bx + c$
- Mencari penyelesaian dan menentukan bilangan penyelesaian.

Identiti trigonometri

- Rumus sudut pelengkap
- Identiti asas
- Rumus sudut majmuk
- Rumus sudut berganda
- Rumus sudut separuh

Aplikasi



Penulisan Jurnal

Dengan menggunakan lembaran pengurusan grafik yang bersesuaian, hasilkan satu ringkasan bagi semua konsep yang terkandung dalam bab ini. Kemudian, bandingkan ringkasan anda dengan rakan yang lain dan buat penambahbaikan jika perlu. Bentangkan hasil kerja anda di hadapan kelas. Guru dan rakan akan bertanyakan soalan kepada anda.



Latihan Sumatif

- Tuliskan julat sudut bagi setiap yang berikut dalam unit radian. **TP 1**
 (a) $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ (b) $-180^\circ \leq x \leq 90^\circ$ (c) $270^\circ \leq x \leq 720^\circ$
- Tuliskan julat sudut bagi setiap jenis sudut yang berikut dalam unit radian. **TP 1**
 (a) Sudut tirus (b) Sudut cakak (c) Sudut refleks
- Nyatakan semua sudut θ antara 0° dengan 360° yang mempunyai nisbah trigonometri yang berikut. **TP 2**
 (a) $\sin \theta$ ialah 0.66 dan -0.66 (b) $\sec \theta$ ialah 2.2727 dan -2.2727
 (c) $\cot \theta$ ialah 1.136 dan -1.136
- Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut. **TP 2**
 (a) $\sin(-120^\circ)$ (b) $\tan 480^\circ$ (c) $\sec 750^\circ$
 (d) $\csc 3\pi$ (e) $\cot(-\frac{9}{4}\pi)$ (f) $\cos(-\frac{8}{3}\pi)$
- Diberi $\sin A = \frac{5}{13}$ dan $\sin B = \frac{4}{5}$, cari nilai bagi $\cos(A - B)$ dan $\tan(A + B)$ jika **TP 3**
 (a) A dan B ialah sudut tirus,
 (b) A dan B ialah sudut cakak,
 (c) $\cos A$ dan $\cos B$ adalah negatif.

BAB

6

- Rajah di sebelah menunjukkan tiga graf bagi $y = a \cos bx$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Salin dan lengkapkan jadual di bawah. **TP 3**

Graf	Persamaan	Bilangan kitaran	Kala	Selang kelas
I				
II				
III				



- (a) Nyatakan kala bagi graf $y = \sin 2x$.
 (b) Tentukan amplitud bagi graf $y = 1 + 2 \cos 3x$. Seterusnya, nyatakan nilai maksimum dan nilai minimum bagi y .
 (c) Pada paksi yang sama, lakarkan setiap fungsi yang berikut bagi $0 \leq x \leq \pi$.
 (i) $y = \sin 2x$ (ii) $y = 1 + 2 \cos 3x$
 (d) Nyatakan bilangan penyelesaian bagi $\sin 2x - 2 \cos 3x - 1 = 0$ bagi $0 \leq x \leq \pi$. **TP 3**

- Diberi sebuah segi tiga ABC , tunjukkan bahawa $\sin(A - B) \sin C = \sin^2 A - \sin^2 B$. **TP 4**

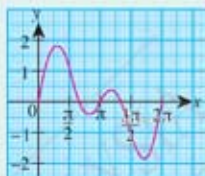
- Buktikan pernyataan yang berikut. **TP 4**

$$\tan A \tan(A - 60^\circ) + \tan A \tan(A + 60^\circ) + \tan(A - 60^\circ) \tan(A + 60^\circ) = -3$$

10. Diberi $A = \cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ dan $B = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Jika A dan B ialah sudut tirus, tunjukkan bahawa $A + B = \frac{\pi}{4}$. **TP 4**

11. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $y = \sin 2x + \sin x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. **TP 4**

- Cari pintasan- x bagi graf tersebut.
- Dengan menggunakan paksi yang sama, lakarkan graf $y = \cos 2x + 1$. Nyatakan nilai maksimum dan kala bagi graf tersebut.
- Seterusnya, nyatakan bilangan penyelesaian bagi persamaan $\sin 2x + \sin x = 2 \cos^2 x$ bagi $0 \leq x \leq 2\pi$.



12. (a) Buktikan bahawa $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$. **TP 4**

- Lakarkan graf fungsi $y = \cos 2x$ bagi $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.
- Dengan menggunakan paksi yang sama, lakarkan satu garis lurus yang sesuai untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan $5\pi(1 - \tan^2 x) = x(1 + \tan^2 x)$ bagi $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

13. (a) Selesaikan setiap persamaan trigonometri yang berikut bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. **TP 5**

- $\sin(x + 30^\circ) = 2 \cos x$
- $2 \sec(x + 60^\circ) = 5 \sec(x - 20^\circ)$
- $\frac{\tan x + \tan 15^\circ}{1 - \tan x \tan 15^\circ} = 2$

- (b) Selesaikan setiap persamaan trigonometri yang berikut bagi $0 \leq x \leq 2\pi$.

- $3 \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $2 \tan x + 3 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
- $\tan 5x = \tan 2x$

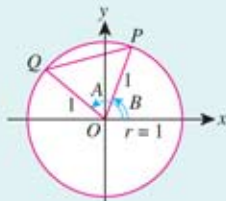
14. Pecutan graviti ialah pecutan yang dihasilkan oleh tindakan daya tarikan graviti ke atas jasad menuju ke pusat bumi. Pecutan, g ini bergantung pada latitud, θ bagi suatu tempat. Nilai g boleh dihitung menggunakan rumus yang berikut. **TP 5**

$$g = 9.78039(1 + 0.005288 \sin \theta - 0.000006 \sin^2 2\theta)$$

- Hitung nilai pecutan graviti di Kuala Lumpur.
- Tentukan latitud apabila pecutan graviti adalah maksimum dan nyatakan nilai tersebut.

15. Rajah di sebelah menunjukkan titik $P(\cos B, \sin B)$ dan titik $Q(\cos A, \sin A)$ yang terletak pada lilitan satu bulatan unit berpusat di O . Dengan menggunakan dua kaedah yang berbeza, cari luas bagi segi tiga OPQ . Seterusnya, tunjukkan bahawa $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$. **TP 6**

[Petunjuk: Gunakan $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ dan $\frac{1}{2} ab \sin C$]





16. Jadual di bawah menunjukkan tiga identiti trigonometri dengan pasangan yang tidak sepadan. Dengan menggunakan sebarang perisian geometri dinamik, plotkan setiap graf tersebut untuk mencari pasangan yang sepadan. **TP 6**

[Petunjuk: Plot $y = \frac{1}{\tan x + \cot x}$, $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ dan sebagainya].

Sebelah Kiri	Sebelah Kanan
(a) $\frac{1}{\tan x + \cot x} =$	$\cos^2 x - \sin^2 x$
(b) $(\sin x - \cos x)(\tan x + \cot x) =$	$\sin x \cos x$
(c) $\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} =$	$\sec x - \csc x$

Seterusnya, buktikan setiap pasangan identiti tersebut.

EKSPLORASI MATEMATIK

Rajah (a) menunjukkan *Magic Hexagon* atau *Super Hexagon* yang boleh digunakan untuk mengingat pelbagai rumus berkaitan identiti trigonometri. Rajah (b) pula ialah satu contoh fungsi trigonometri salingan yang boleh dijana menggunakan *Magic Hexagon*.



Rajah (a)

Fungsi Salingan



$\sin A = \frac{1}{\csc A}$	$\longleftrightarrow$	$\csc A = \frac{1}{\sin A}$
$\cos A = \frac{1}{\sec A}$	$\longleftrightarrow$	$\sec A = \frac{1}{\cos A}$
$\tan A = \frac{1}{\cot A}$	$\longleftrightarrow$	$\cot A = \frac{1}{\tan A}$

Rajah (b)

Layari Internet untuk mengetahui dengan lebih lanjut berkaitan rumus yang boleh dijana dengan menggunakan *Magic Hexagon*. Terangkan kaedah yang boleh digunakan untuk mendapatkan rumus-rumus tersebut dan senaraikan semua rumus yang berkaitan.