

BAB 6

Nisbah dan Graf Fungsi Trigonometri

Apakah yang akan anda pelajari?

- Nilai Sinus, Kosinus dan Tangen bagi Sudut θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
- Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen

Maslahat Bab Ini

Jurutera menggunakan graf fungsi trigonometri dalam pembinaan dewan konsert untuk mengukur kekuatan bunyi supaya bunyi didengar dengan jelas. Ahli geologi juga menggunakan graf fungsi trigonometri untuk membantu mereka memahami pembentukan corak berkala kejadian gempa bumi dan gelombang ombak.

Tahukah Anda?

Hipparchus dari Nicaea merupakan seorang ahli astronomi dan ahli matematik yang dikenali sebagai Bapa Trigonometri atas sumbangannya dalam trigonometri. Beliau menghasilkan satu sifir trigonometri dalam percubaannya untuk memahami pergerakan bintang-bintang dan bulan.



Untuk maklumat lanjut:



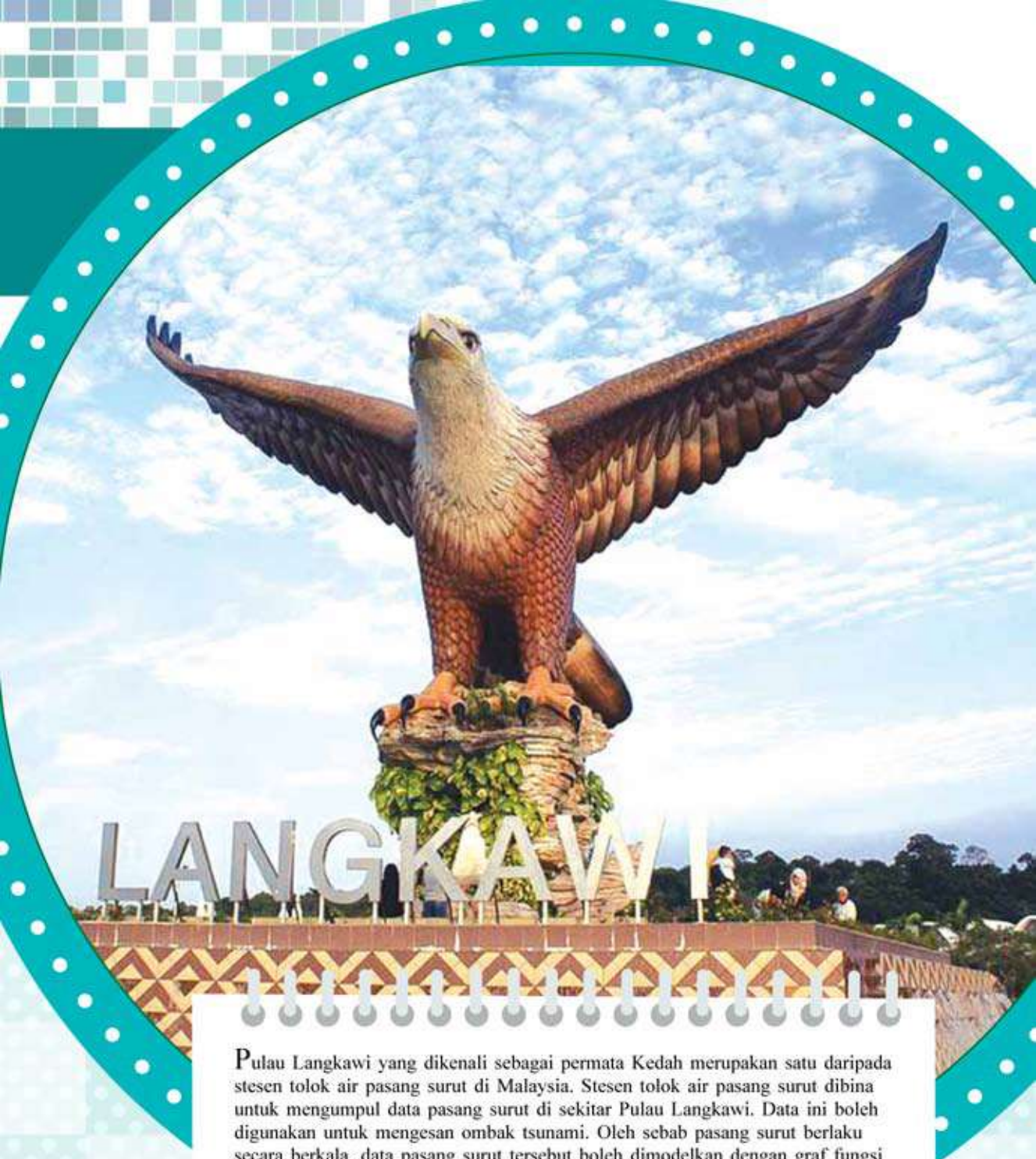
bit.do/TahukahAndaBab6

GERBANG ISTILAH



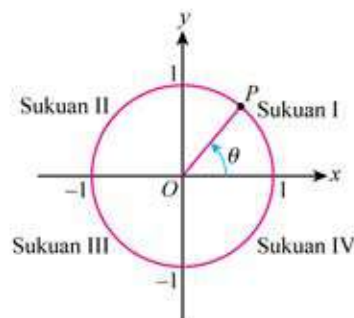
bulatan unit
fungsi trigonometri
kosinus
sinus
sudut rujukan sepadan
sukuan
tangen

unit circle
trigonometric function
cosine
sine
corresponding reference angle
quadrant
tangent



Pulau Langkawi yang dikenali sebagai permata Kedah merupakan satu daripada stesen tolok air pasang surut di Malaysia. Stesen tolok air pasang surut dibina untuk mengumpul data pasang surut di sekitar Pulau Langkawi. Data ini boleh digunakan untuk mengesan ombak tsunami. Oleh sebab pasang surut berlaku secara berkala, data pasang surut tersebut boleh dimodelkan dengan graf fungsi trigonometri.

Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit. **Bulatan unit** ialah bulatan yang berjari 1 unit dan berpusat di asalan. Paksi- x dan paksi- y membahagikan bulatan unit kepada 4 sukuan yang sama, iaitu sukuan I, sukuan II, sukuan III dan sukuan IV.



Diberi P ialah satu titik yang bergerak di sepanjang lilitan bulatan unit dan θ ialah sudut yang dibentuk oleh jejari bulatan unit, OP , dari paksi- x yang positif mengikut arah lawan jam. Didapati bahawa

- titik P berada dalam sukuan I apabila $0^\circ < \theta < 90^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan II apabila $90^\circ < \theta < 180^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan III apabila $180^\circ < \theta < 270^\circ$,
- titik P berada dalam sukuan IV apabila $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

Apakah perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan?

Standard Pembelajaran

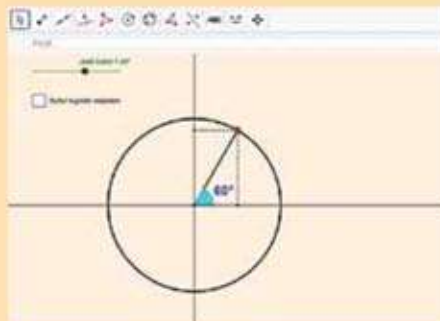
Membuat dan menentusahkan konjektur tentang nilai sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

MOBILISASI MINDA 1 Berpasangan

Tujuan: Meneroka perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

Langkah:

- Buka fail GGB601 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB601 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

- Seret titik merah ke sukuan II, III dan IV. Perhatikan sudut berwarna biru. [Gelongsor 'Julat sudut' boleh diseret untuk mengubah sudut yang dipaparkan.]
- Tekan 'Sudut rujukan sepadan'.
- Seret titik merah dan perhatikan sudut rujukan sepadan dalam sukuan II, III dan IV.

5. Tulis hubungan antara sudut rujukan sepadan, α , dengan sudut berwarna biru, θ , dalam setiap sukuan.

Sukuan I	Sukuan II	Sukuan III	Sukuan IV
$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha =$

6. Seret titik merah dan pilih satu sudut berwarna biru, θ , di sukuan II, III dan IV untuk lengkapkan jadual di bawah. Kalkulator saintifik digunakan untuk membuat pengiraan.

Sukuan :

Sudut berwarna biru, $\theta =$ Sudut rujukan sepadan, $\alpha =$

$\sin \theta$	$\sin \alpha$	$\cos \theta$	$\cos \alpha$	$\tan \theta$	$\tan \alpha$

7. Berdasarkan jadual dalam langkah 6, bandingkan nilai sinus, kosinus dan tangen sudut berwarna biru, θ , dengan sudut rujukan sepadan, α . Lengkapkan setiap berikut dengan tanda positif atau tanda negatif.

Sukuan II

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Sukuan III

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Sukuan IV

$$\sin \theta = \text{ } \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \text{ } \cos \alpha$$

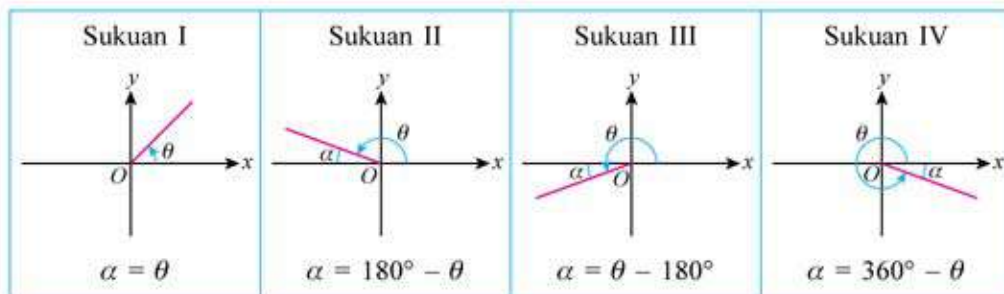
$$\tan \theta = \text{ } \tan \alpha$$

Perbincangan:

1. Apakah ciri-ciri sudut rujukan sepadan dan hubungannya dengan sudut dalam sukuan II, III dan IV?
2. Apakah kesimpulan anda tentang perkaitan fungsi sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa:

- (a) **Sudut rujukan sepadan**, α , sentiasa kurang daripada 90° . Sudut dalam sukuan II, III dan IV mempunyai sudut rujukan sepadan, α . Sudut dalam sukuan I itu sendiri merupakan sudut rujukan sepadan, $\alpha = \theta$.

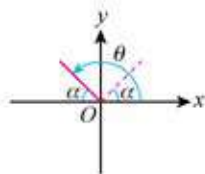


Sudut rujukan dalam sukuan II, III dan IV ialah sudut dalam sukuan I yang sepadan dengannya.

- (b) Hubungan antara fungsi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan boleh dirumuskan seperti berikut:

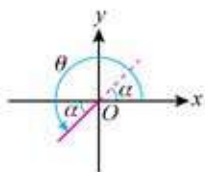
Sukuan II

$$\begin{aligned}\sin \theta &= +\sin \alpha = +\sin (180^\circ - \theta) \\ \cos \theta &= -\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \theta) \\ \tan \theta &= -\tan \alpha = -\tan (180^\circ - \theta)\end{aligned}$$



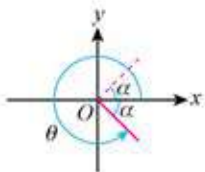
Sukuan III

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sin \alpha = -\sin (\theta - 180^\circ) \\ \cos \theta &= -\cos \alpha = -\cos (\theta - 180^\circ) \\ \tan \theta &= +\tan \alpha = +\tan (\theta - 180^\circ)\end{aligned}$$



Sukuan IV

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sin \alpha = -\sin (360^\circ - \theta) \\ \cos \theta &= +\cos \alpha = +\cos (360^\circ - \theta) \\ \tan \theta &= -\tan \alpha = -\tan (360^\circ - \theta)\end{aligned}$$



Sukuan II sin θ (+) kos θ (-) tan θ (-)	Sukuan I Semua (+)
Sukuan III sin θ (-) kos θ (-) tan θ (+)	Sukuan IV sin θ (-) kos θ (+) tan θ (-)

Contoh 1

Tentukan sukuan dan sudut rujukan sepadan bagi setiap sudut berikut.

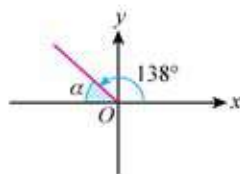
(a) 138°

(b) 239°

(c) 312°

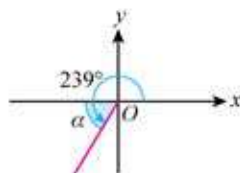
Penyelesaian:

(a)



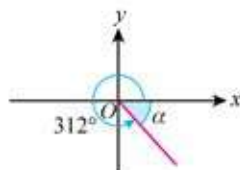
138° terletak dalam sukuan II.
Sudut rujukan sepadan, α
 $= 180^\circ - 138^\circ$
 $= 42^\circ$

(b)



239° terletak dalam sukuan III.
Sudut rujukan sepadan, α
 $= 239^\circ - 180^\circ$
 $= 59^\circ$

(c)



312° terletak dalam sukuan IV.
Sudut rujukan sepadan, α
 $= 360^\circ - 312^\circ$
 $= 48^\circ$

TiP Bestari

Sudut rujukan sepadan ialah sudut tirus.

Minda Kritis

Untuk mendapatkan sudut rujukan sepadan, α , mengapakah rumus $\theta - 180^\circ$ digunakan di dalam Contoh 1(b)?

Minda Kritis

Hitung sudut rujukan sepadan sekiranya sudut yang diberi ialah 498° .

Contoh 2

Nyatakan hubungan fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.

- (a) $\sin 167^\circ$ (b) $\cos 258^\circ$ (c) $\tan 349^\circ$

Penyelesaian:

hanya $\sin \theta$ bernilai positif

- (a) Sudut 167° terletak dalam sukuan II.

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin (180^\circ - \theta) \\ \sin 167^\circ &= \sin (180^\circ - 167^\circ) \\ \sin 167^\circ &= \sin 13^\circ\end{aligned}$$

hanya $\cos \theta$ bernilai positif

- (c) Sudut 349° terletak dalam sukuan IV.

$$\begin{aligned}\tan \theta &= -\tan (360^\circ - \theta) \\ \tan 349^\circ &= -\tan (360^\circ - 349^\circ) \\ \tan 349^\circ &= -\tan 11^\circ\end{aligned}$$

hanya $\tan \theta$ bernilai positif

- (b) Sudut 258° terletak dalam sukuan III.

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\cos (\theta - 180^\circ) \\ \cos 258^\circ &= -\cos (258^\circ - 180^\circ) \\ \cos 258^\circ &= -\cos 78^\circ\end{aligned}$$

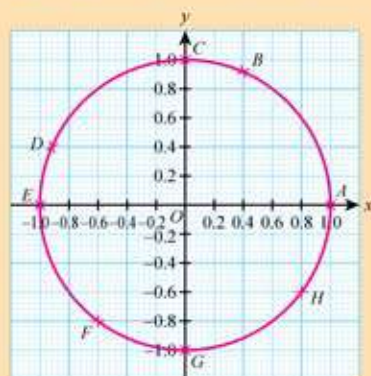
MOBILISASI MINDA 2 Berpasangan

Tujuan: Meneriksa hubungan nilai sinus, kosinus dan tangen dengan nilai koordinat- x dan koordinat- y bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV dalam bulatan unit.

Langkah:

- Lukis paksi- x dan paksi- y dengan asalan O pada kertas graf serta satu bulatan berpusat O dengan jejari 1 unit seperti rajah di sebelah.
- Plot titik-titik seperti rajah di sebelah.
- Salin dan lengkapkan jadual seperti berikut.

Titik	koordinat- x	koordinat- y	$\frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}$
A			
B			



- Diberi θ ialah sudut yang dibentuk oleh jejari bulatan unit dari paksi- x yang positif mengikut arah lawan jam. Ukur sudut θ tersebut daripada graf yang dilukis dan lengkapkan jadual seperti berikut.

Jejari	Sudut θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
OA				
OB				

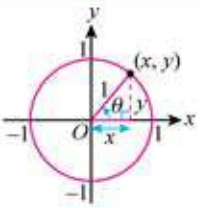
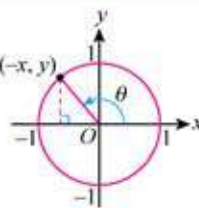
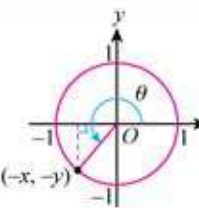
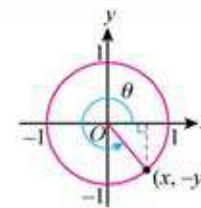
Perbincangan:

- Apakah hubungan nilai koordinat- x , koordinat- y dan nisbah koordinat- y kepada koordinat- x dengan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa;

$$\sin \theta = \frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x} \quad \cos \theta = \frac{\text{koordinat-}x}{\text{koordinat-}x} \quad \tan \theta = \frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}$$

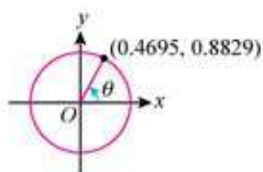
Secara umumnya,

Sukuan I	Sukuan II	Sukuan III	Sukuan IV
 $\sin \theta = +y$ $\cos \theta = +x$ $\tan \theta = +\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = +y$ $\cos \theta = -x$ $\tan \theta = -\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = -y$ $\cos \theta = -x$ $\tan \theta = +\frac{y}{x}$	 $\sin \theta = -y$ $\cos \theta = +x$ $\tan \theta = -\frac{y}{x}$

Contoh 3

Setiap rajah berikut menunjukkan satu bulatan unit dengan sudut θ . Tentukan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$.

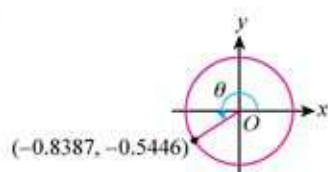
(a)



Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sin \theta &= 0.8829 \\ \cos \theta &= 0.4695 \\ \tan \theta &= \frac{0.8829}{0.4695} \\ &= 1.8805 \end{aligned}$$

(b)



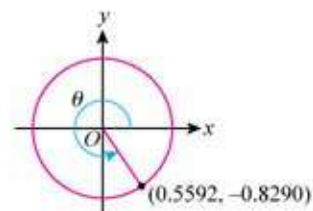
$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sin \theta &= -0.5446 \\ \cos \theta &= -0.8387 \\ \tan \theta &= \frac{-0.5446}{-0.8387} \\ &= 0.6493 \end{aligned}$$

Latih Kendiri 6.1a

- Tentukan sudut rujukan sepadan bagi setiap sudut berikut.

(a) 97°	(b) 189°	(c) 278°	(d) 164.2°
(e) 253.6°	(f) 305.7°	(g) $128^\circ 53'$	(h) $215^\circ 42'$
- Nyatakan hubungan fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.

(a) $\sin 101^\circ$	(b) $\cos 194^\circ$	(c) $\tan 246^\circ$
(d) $\tan 294.5^\circ$	(e) $\sin 339.8^\circ$	(f) $\cos 112.3^\circ$
(g) $\cos 287^\circ 45'$	(h) $\tan 96^\circ 31'$	(i) $\sin 203^\circ 26'$
- Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit dengan sudut θ . Tentukan nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$.



Bagaimanakah menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV?

Tentukan sudut rujukan sepadan.

Tentukan tanda positif atau negatif bagi sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV.

Standard Pembelajaran

Menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV berdasarkan sudut rujukan sepadan.

Contoh 4

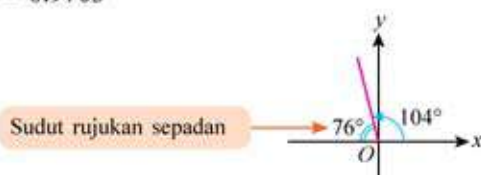
Tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan masing-masing.

- (a) $\sin 104^\circ$ (b) $\cos 208.2^\circ$ (c) $\tan 318^\circ 17'$

Penyelesaian:

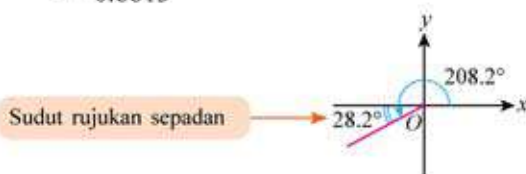
(a) $\sin 104^\circ = +\sin (180^\circ - 104^\circ)$
 $= +\sin 76^\circ$
 $= 0.9703$

nilai sinus adalah positif dalam sukuan II



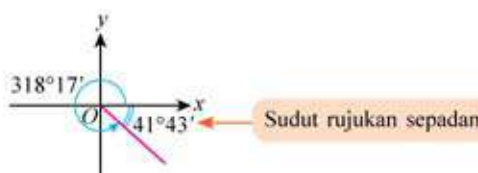
(b) $\cos 208.2^\circ = -\cos (208.2^\circ - 180^\circ)$
 $= -\cos 28.2^\circ$
 $= -0.8813$

nilai kosinus adalah negatif dalam sukuan III



(c) $\tan 318^\circ 17' = -\tan (360^\circ - 318^\circ 17')$
 $= -\tan 41^\circ 43'$
 $= -0.8915$

nilai tangen adalah negatif dalam sukuan IV



TiP Bestari

Sukuan I : Semua positif
 Sukuan II : $\sin \theta$ positif
 Sukuan III : $\tan \theta$ positif
 Sukuan IV : $\cos \theta$ positif

Tip mengingat:
 Menggunakan akronim yang sesuai.

i-Teknologi

Untuk menentukan nilai $\tan 41^\circ 43'$ daripada kalkulator saintifik, tekan

$\tan$ 4 1 DMS
 4 3 DMS $=$

Pastikan kalkulator saintifik anda adalah dalam mod "Deg".

mod "Deg"



1. Tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) $\sin 128^\circ$ | (b) $\sin 236^\circ$ | (c) $\sin 337^\circ$ |
| (d) $\cos 196^\circ$ | (e) $\cos 289^\circ$ | (f) $\cos 127^\circ$ |
| (g) $\tan 221^\circ$ | (h) $\tan 134^\circ$ | (i) $\tan 316^\circ$ |
| (j) $\tan 321.4^\circ$ | (k) $\sin 341.7^\circ$ | (l) $\cos 99.3^\circ$ |
| (m) $\cos 307^\circ 39'$ | (n) $\tan 102^\circ 38'$ | (o) $\sin 197^\circ 42'$ |

Bagaimanakah menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV yang sepadan dengan sudut 30° , 45° dan 60° ?

Contoh 5

Tanpa menggunakan kalkulator saintifik, tentukan nilai bagi setiap berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.

- (a) $\cos 150^\circ$ (b) $\tan 225^\circ$ (c) $\sin 300^\circ$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos 150^\circ &= -\cos (180^\circ - 150^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

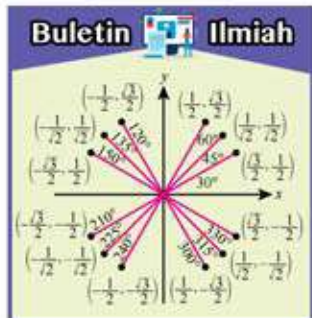
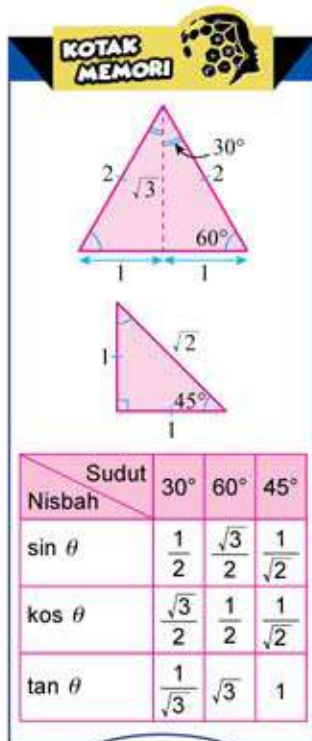
nilai kosinus adalah negatif dalam sukuan II

$$\begin{aligned} \text{(b) } \tan 225^\circ &= +\tan (225^\circ - 180^\circ) \\ &= +\tan 45^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

nilai tangen adalah positif dalam sukuan III

$$\begin{aligned} \text{(c) } \sin 300^\circ &= -\sin (360^\circ - 300^\circ) \\ &= -\sin 60^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

nilai sinus adalah negatif dalam sukuan IV



Latih Kendiri 6.1c

1. Tentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi setiap sudut berikut tanpa menggunakan kalkulator saintifik.

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) 120° | (b) 135° | (c) 210° |
| (d) 240° | (e) 315° | (f) 330° |

2. Diberi $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hitung $\cos \theta$ dan $\tan \theta$ tanpa menggunakan kalkulator saintifik.

Bagaimanakah anda menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi?

Standard Pembelajaran

Menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi.

Kenal pasti sukuan berdasarkan tanda positif atau negatif pada nilai fungsi trigonometri.

Tentukan sudut rujukan sepadan.

Hitung sudut θ berdasarkan sukuan yang dikenal pasti.

Contoh 6

- (a) Diberi $\sin \theta = 0.6157$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
 (b) Diberi $\cos \theta = -0.4226$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
 (c) Diberi $\tan \theta = -1.4826$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .

Penyelesaian:

- (a) $\sin \theta = 0.6157$ — Tanda positif. θ berada dalam sukuan I atau II

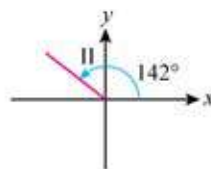
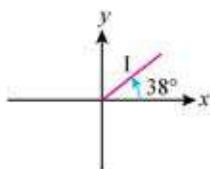
Sudut rujukan sepadan

$$= \sin^{-1} 0.6157$$

$$= 38^\circ$$

$$\theta = 38^\circ \text{ atau } (180^\circ - 38^\circ)$$

$$= 38^\circ \text{ atau } 142^\circ$$



- (b) $\cos \theta = -0.4226$ — Tanda negatif. θ berada dalam sukuan II atau III

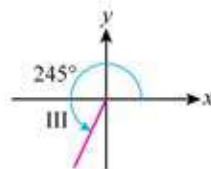
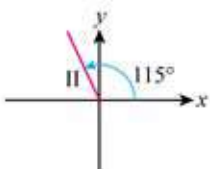
Sudut rujukan sepadan

$$= \cos^{-1} 0.4226$$

$$= 65^\circ$$

$$\theta = (180^\circ - 65^\circ) \text{ atau } (180^\circ + 65^\circ)$$

$$= 115^\circ \text{ atau } 245^\circ$$



- (c) $\tan \theta = -1.4826$ — Tanda negatif. θ berada dalam sukuan II atau IV

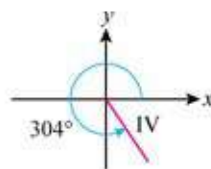
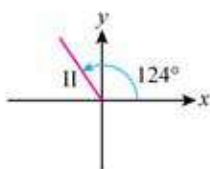
Sudut rujukan sepadan

$$= \tan^{-1} 1.4826$$

$$= 56^\circ$$

$$\theta = (180^\circ - 56^\circ) \text{ atau } (360^\circ - 56^\circ)$$

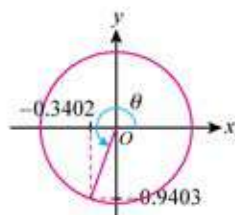
$$= 124^\circ \text{ atau } 304^\circ$$



1. Diberi bahawa $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ bagi setiap yang berikut. Bundarkan jawapan kepada 1 tempat perpuluhan.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\sin \theta = 0.9397$ | (b) $\cos \theta = 0.9336$ | (c) $\tan \theta = 0.8391$ |
| (d) $\tan \theta = -1.198$ | (e) $\cos \theta = -0.6018$ | (f) $\sin \theta = -0.7314$ |
| (g) $\cos \theta = -0.5829$ | (h) $\sin \theta = -0.8395$ | (i) $\tan \theta = 0.7391$ |

2. Rajah di sebelah menunjukkan satu bulatan unit dengan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Hitung sudut θ . Bundarkan jawapan kepada 1 tempat perpuluhan.

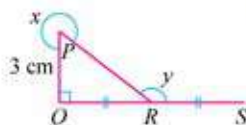


Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan sinus, kosinus dan tangen?

Contoh 7

Dalam rajah di sebelah, QRS ialah garis lurus. Diberi $QS = 8$ cm dan $QR = RS$, hitung

- (a) $\cos x$
(b) $\tan y$



Penyelesaian:

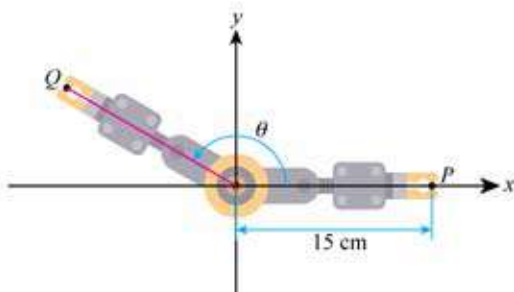
$$QR = 8 \text{ cm} \div 2 \quad \text{dan} \quad PR = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ = 4 \text{ cm} \quad \quad \quad = 5 \text{ cm}$$

- (a) $270^\circ < x < 360^\circ$,
maka sudut x berada dalam sukuan IV.
 $\cos x = +\cos \angle QPR$ $\angle QPR$ ialah sudut rujukan sepadan bagi sudut x
 $= +\frac{3}{5}$

- (b) $90^\circ < y < 180^\circ$,
maka sudut y berada dalam sukuan II.
 $\tan y = -\tan \angle PRQ$ $\angle PRQ$ ialah sudut rujukan sepadan bagi sudut y
 $= -\frac{3}{4}$

Contoh 8

Sekumpulan murid menghasilkan sebuah lengan robotik dengan panjang 15 cm seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Lengan robotik itu diprogramkan untuk memindahkan satu objek dari titik P ke titik Q . Diberi bahawa $\cos \theta = -0.866$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, hitung sudut θ dan jarak, dalam cm, di antara titik P dengan titik Q .



Penyelesaian:

$$\cos \theta = -0.866$$

Tanda negatif, θ berada dalam sukuan II ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

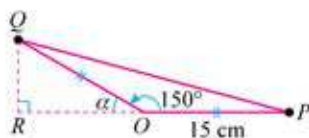
Sudut rujukan sepadan

$$= \cos^{-1} 0.866$$

$$= 30^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ$$

$$= 150^\circ$$



$$\alpha = 180^\circ - 150^\circ \\ = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{OR}{15}$$

$$OR = 15 \sin 30^\circ \\ = 7.5 \text{ cm}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OR}{15}$$

$$OR = 15 \cos 30^\circ \\ = 12.99 \text{ cm}$$

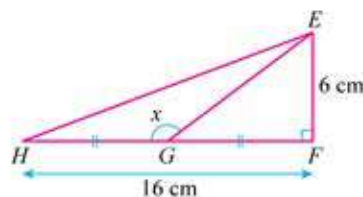
$$PQ = \sqrt{QR^2 + PR^2} \\ = \sqrt{7.5^2 + 27.99^2} \\ = 28.98 \text{ cm}$$

Latih Kendiri 6.1e

1. Dalam rajah di sebelah, HGF ialah garis lurus.

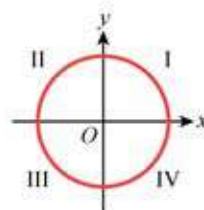
Diberi $HG = GF$, hitung

- (a) $\cos x$,
(b) $\sin x$.



2. Yong Ying bermain permainan baling damak. Papan damak berbentuk bulat dan mempunyai empat sukuan seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Dia mendapati bahawa damak yang dilempar biasanya mengenai kawasan sukuan yang mempunyai nilai $\sin \theta = 0.809$. Nyatakan

- (a) sukuan-sukuan tersebut,
(b) sudut-sudut θ .



3. Sebuah kapal belayar dari kedudukan A ke kedudukan B dengan keadaan jarak $OA = OB$. Laluan kapal tersebut adalah selari dengan daratan. Dari kedudukan B , kapal tersebut akan belayar ke arah utara menuju ke rumah api, C . Jika $OA = 20 \text{ m}$, hitung

- (a) sudut θ ,
(b) jarak, dalam m, di antara kapal tersebut di kedudukan B dengan rumah api,
(c) nilai $\tan \angle AOC$.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jam loceng.

- (a) Hitung sudut θ yang dicangkum oleh jarum minit jika jarum minit itu diputar lawan arah jam dari nombor 3 ke nombor 10.
(b) Seterusnya, hitung nilai $\cos \theta$.



6.2 Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen



Selepas kita membuat pemeriksaan jantung di hospital, doktor akan menerangkan keadaan jantung kita berdasarkan keputusan elektrokardiogram. Graf elektrokardiogram mempunyai ciri-ciri graf fungsi trigonometri. Apakah ciri-ciri tersebut?

Apakah ciri-ciri graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$?

Standard Pembelajaran

Melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ dan membandingkan ciri-ciri graf fungsi tersebut.

MOBILISASI MINDA 3

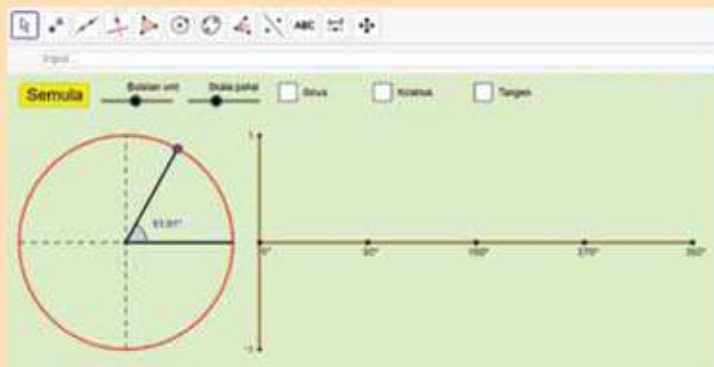
Berpasangan

Tujuan: Melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ serta membandingkan ciri-ciri graf tersebut.

Langkah:

Aktiviti 1

1. Buka fail GGB602 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB602 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Tekan 'Sinus' dan kemudian seret titik merah.
3. Perhatikan bentuk, nilai pada paksi-y apabila sudut ialah 0° , nilai maksimum, nilai minimum dan pintasan-x bagi graf yang terbentuk.
4. Ulangi Langkah 2 hingga 3 dengan 'Kosinus' dan 'Tangen'.
[Tekan 'Semula' jika ingin memadamkan graf yang terbentuk.]

Aktiviti II

1. Buka lembaran kerja dengan mengimbas kod QR untuk aktiviti ini. Lengkapkan jadual yang diberi.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sin x$							
$\cos x$							
$\tan x$							



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab6 untuk mendapatkan lembaran kerja aktiviti ini.

2. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 30° pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ secara berasingan pada kertas graf.
3. Perhatikan bentuk, nilai maksimum, nilai minimum, pintasan- x dan pintasan- y bagi setiap graf tersebut.
4. Lengkapkan jadual berikut.

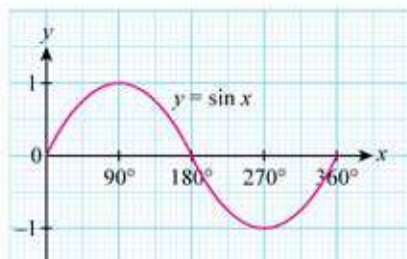
	Nilai maksimum	Nilai minimum	Pintasan- x	Pintasan- y
$y = \sin x$				
$y = \cos x$				
$y = \tan x$				

Perbincangan:

Bagi graf sinus, kosinus dan tangen,

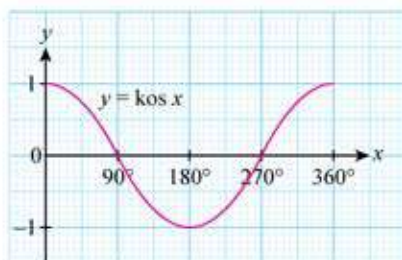
- apakah bentuk setiap graf tersebut?
- apakah nilai maksimum dan nilai minimum bagi setiap graf tersebut?
- apakah pintasan- x dan pintasan- y bagi setiap graf tersebut?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa ciri-ciri graf sinus, kosinus dan tangen adalah seperti berikut.

Graf sinus, $y = \sin x$ 

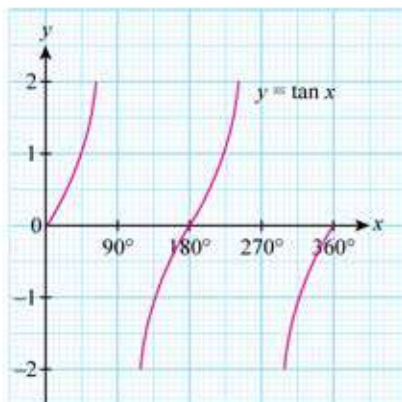
- mempunyai nilai maksimum 1 apabila $x = 90^\circ$ dan nilai minimum -1 apabila $x = 270^\circ$
- memintas paksi- x pada $x = 0^\circ$, 180° dan 360° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 0$ (pintasan- y)

Graf kosinus, $y = \cos x$



- mempunyai nilai maksimum 1 apabila $x = 0^\circ$ dan 360° dan nilai minimum -1 apabila $x = 180^\circ$
- memintas paksi- x pada $x = 90^\circ$ dan 270° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 1$ (pintasan- y)

Graf tangen, $y = \tan x$



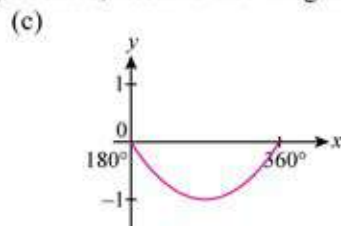
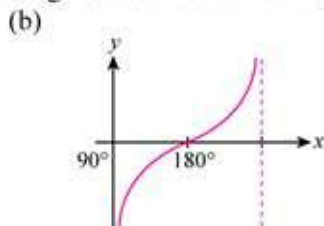
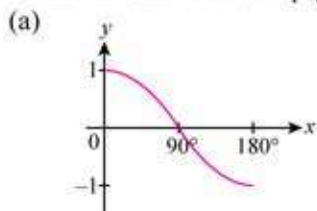
- nilai maksimum ialah ∞ dan nilai minimum ialah $-\infty$
- memintas paksi- x pada $x = 0^\circ, 180^\circ$ dan 360° (pintasan- x)
- memintas paksi- y pada $y = 0$ (pintasan- y)
- nilai $\tan 90^\circ$ dan $\tan 270^\circ$ tidak tertakrif



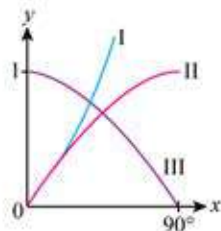
- Apakah yang dimaksudkan dengan nilai tidak tertakrif?
- Mengapakah $\tan 90^\circ$ dan $\tan 270^\circ$ tidak tertakrif?

Latih Kendiri 6.2a

1. Tentukan sama ada setiap graf trigonometri berikut ialah graf sinus, kosinus atau tangen.

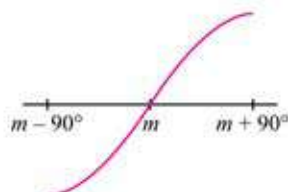


2. (a) Lakar graf $y = \sin x$ dengan keadaan $90^\circ \leq x \leq 270^\circ$.
(b) Lakar graf $y = \cos x$ dengan keadaan $45^\circ \leq x \leq 225^\circ$.
3. Rajah di sebelah menunjukkan tiga graf trigonometri bagi sudut di antara 0° dengan 90° .
(a) Kenal pasti persamaan graf I, II dan III.
(b) Nyatakan nilai maksimum dan nilai minimum graf I, II dan III, jika ada.

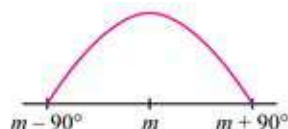


4. Bagi setiap fungsi trigonometri berikut, nyatakan nilai x apabila nilai y adalah maksimum dan nyatakan nilai maksimum tersebut.
- $y = \sin x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 - $y = \cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 - $y = \tan x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
5. Setiap rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi trigonometri dengan keadaan $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Nyatakan fungsi itu dan nilai m .

(a)

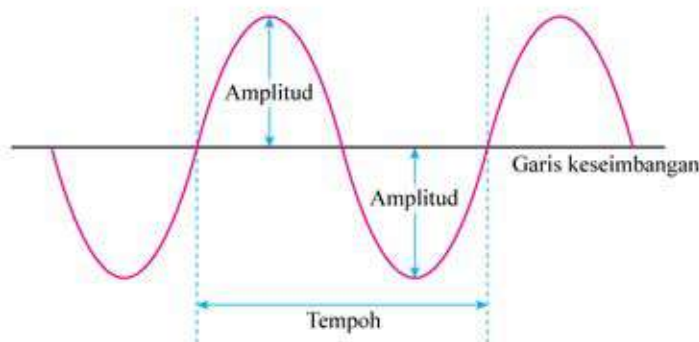


(b)



6 Apakah kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$?

Rajah di bawah menunjukkan ciri-ciri fungsi berkala, iaitu tempoh dan amplitud.



Standard Pembelajaran

Mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri:

- $y = a \sin bx + c$
 - $y = a \cos bx + c$
 - $y = a \tan bx + c$
- bagi $a > 0$, $b > 0$.

TiP Bestari

Amplitud juga dapat ditentukan dengan rumus:

$$\left(\frac{\text{nilai maksimum} - \text{nilai minimum}}{2} \right)$$

Tempoh ialah selang satu kitaran lengkap. Fungsi trigonometri ialah fungsi berkala. Graf fungsi trigonometri berulang bagi setiap selang tertentu. Misalnya, graf fungsi sinus berulang bagi setiap selang 360° . Kita boleh mengatakan fungsi $y = \sin x$ ialah fungsi yang berkala dengan tempoh 360° . Amplitud pula ialah jarak maksimum yang diukur dari garis keseimbangan.

Jika diberi fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$, apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi trigonometri jika nilai pemalar a , b dan c berubah?

Tujuan: Mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$.

Langkah:

1. Buka fail GGB603 untuk aktiviti ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/GGB603 untuk mendapatkan fail GeoGebra aktiviti ini.

2. Seret gelongsor nilai a dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
3. Seret gelongsor nilai b dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
4. Seret gelongsor nilai c dan perhatikan perubahan pada graf yang dipaparkan.
5. Ulangi langkah 2 hingga 4 untuk 'Lengkung kosinus' dan 'Lengkung tangen'.

Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri $y = a \sin bx + c$, $y = a \cos bx + c$ dan $y = a \tan bx + c$ dengan keadaan $a > 0$, $b > 0$?

Hasil daripada Mobilisasi Minda 4, didapati bahawa

- (a) apabila a berubah, nilai maksimum dan minimum berubah,
 - (b) apabila b berubah, graf akan termampat atau mengembang,
 - (c) apabila c berubah, graf akan beranjak secara menegak ke atas atau ke bawah.
- Nilai a mempengaruhi amplitud fungsi, nilai b mempengaruhi tempoh fungsi dan nilai c mempengaruhi kedudukan graf fungsi.

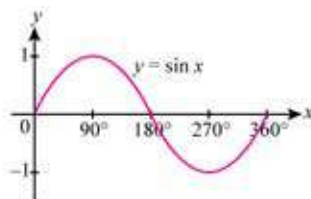
Secara umumnya,

	$y = a \sin bx + c$, $a > 0, b > 0$	$y = a \cos bx + c$, $a > 0, b > 0$	$y = a \tan bx + c$, $a > 0, b > 0$
Nilai a berubah	• Nilai maksimum dan nilai minimum berubah • Amplitud fungsi = a		• Lengkung graf berubah • Tiada amplitud
Nilai b berubah	• Tempoh fungsi berubah • Apabila nilai b bertambah, graf kelihatan mampat secara mengufuk, tempoh fungsi semakin berkurang • Tempoh fungsi sinus dan kosinus = $\frac{360^\circ}{b}$; Tempoh fungsi tangen = $\frac{180^\circ}{b}$		
Nilai c berubah	• Kedudukan graf berubah • Apabila $c > 0$, graf beranjak c unit secara menegak ke atas paksi-x • Apabila $c < 0$, graf beranjak c unit secara menegak ke bawah paksi-x		

Contoh 9

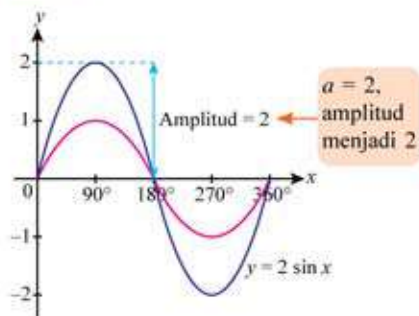
Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \sin x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

- (a) $y = 2 \sin x$ (b) $y = \sin 2x$
 (c) $y = \sin x + 1$ (d) $y = 2 \sin 2x$

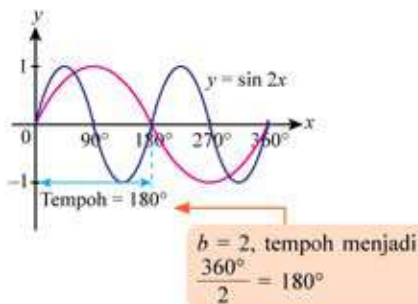


Penyelesaian:

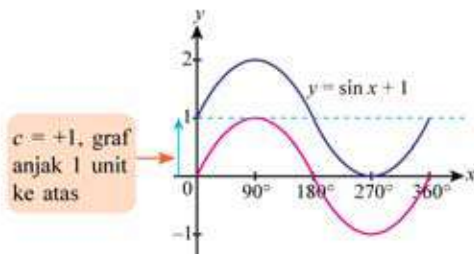
(a)



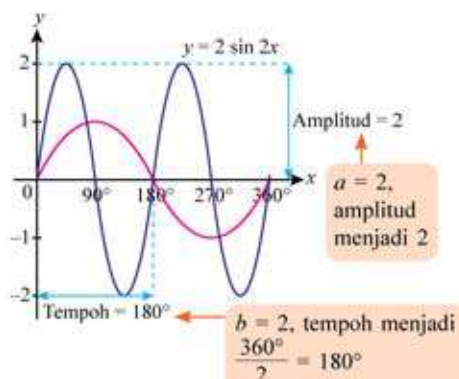
(b)



(c)



(d)

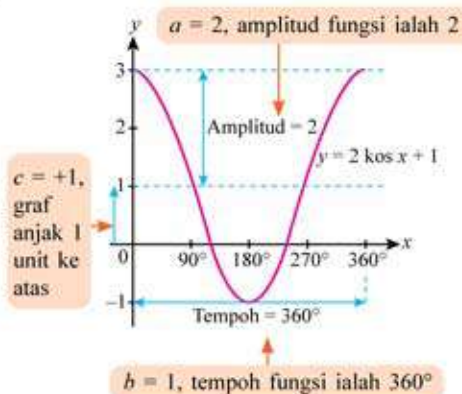
**Contoh 10**

Lakar setiap fungsi trigonometri berikut bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

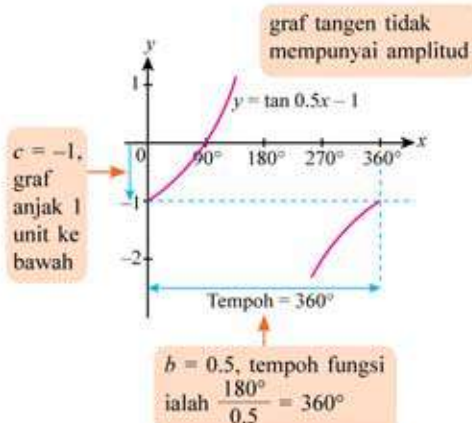
- (a) $y = 2 \cos x + 1$ (b) $y = \tan 0.5x - 1$

Penyelesaian:

(a)



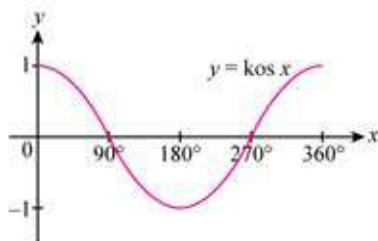
(b)



- Tentukan amplitud dan tempoh bagi setiap fungsi trigonometri berikut.
 - $y = 4 \sin x$
 - $y = 3 \sin 2x$
 - $y = 2 \sin 3x - 4$
 - $y = \cos 4x$
 - $y = 4 \cos 2x$
 - $y = 3 \cos 3x + 1$
 - $y = \frac{1}{3} \tan 3x$
 - $y = 3 \tan \frac{1}{3}x$
 - $y = 3 \tan 2x + 2$

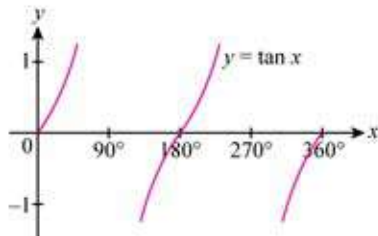
- Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \cos x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

- $y = \frac{1}{2} \cos x$
- $y = \cos \frac{x}{2}$
- $y = \cos x - 2$



- Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Lakar setiap fungsi trigonometri berikut pada paksi yang sama.

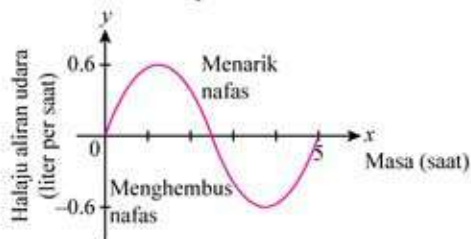
- $y = \tan 2x$
- $y = \tan x + 2$



Bagaimanakah menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi trigonometri?

Contoh 11

Halaju aliran udara dalam kitaran pernafasan normal



Graf di atas menunjukkan satu kitaran pernafasan yang lengkap. Kitaran ini terdiri daripada proses menarik nafas dan menghembuskan nafas. Kitaran ini berlaku setiap 5 saat. Halaju aliran udara adalah positif apabila kita menarik nafas dan negatif apabila kita menghembuskan nafas. Halaju ini diukur dalam liter per saat.

- Jika y mewakili halaju aliran udara selepas x saat, nyatakan satu fungsi dalam bentuk $y = a \sin bx + c$ yang memodelkan aliran udara dalam kitaran pernafasan normal yang ditunjukkan seperti graf di atas.
- Berapakah halaju aliran udara, dalam liter per saat, apabila masa ialah 7 saat?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi sinus, kosinus dan tangen.

Penyelesaian:

- (a) Daripada graf, amplitud = 0.6, maka
- $a = 0.6$

$$\text{tempoh} = 5 \text{ saat, maka } \frac{360^\circ}{b} = 5$$

$$b = 72$$

tiada pergerakan ke atas atau ke bawah paksi- x , maka $c = 0$

Maka, fungsi yang memodelkan aliran udara dalam kitaran pernafasan normal yang ditunjukkan seperti graf ialah $y = 0.6 \sin 72x$.

- (b)
- $y = 0.6 \sin 72x$

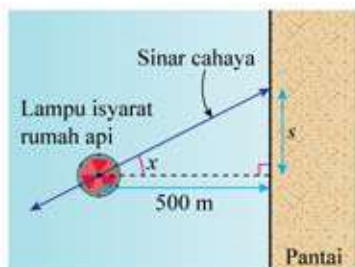
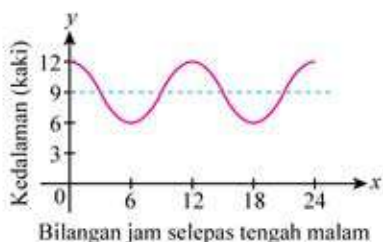
Apabila $x = 7$, $y = 0.6 \sin (72 \times 7)$

$$y = 0.35$$

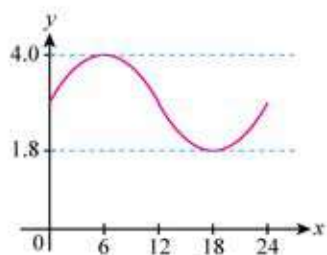
Maka, halaju aliran udara ialah 0.35 liter per saat pada masa 7 saat.

Latih Kendiri 6.2c

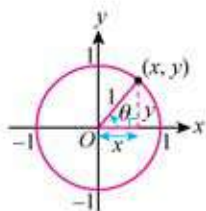
- Graf di sebelah menunjukkan kedalaman air yang direkodkan di suatu limbungan kapal.
 - Jika y mewakili kedalaman air, dalam kaki, dan x mewakili bilangan jam selepas tengah malam, guna fungsi dalam bentuk $y = a \cos bx + c$ untuk memodelkan kedalaman air yang ditunjukkan seperti graf tersebut.
 - Jam keberapakah kedudukan air paling dalam?
- Rajah di sebelah menunjukkan pandangan atas sebuah rumah api. Lampu isyarat rumah api menghantar sinar cahaya seperti dalam rajah. Apabila lampu isyarat berputar, sinar cahaya bergerak di sepanjang pantai pada sudut x .
 - Tulis satu fungsi bagi jarak s .
 - Nyatakan amplitud dan tempoh fungsi itu.



- Graf di sebelah menggambarkan aras air yang direkodkan di sebuah pelabuhan. Diberi y mewakili aras air, dalam m, dan x mewakili masa, dalam jam. Nyatakan fungsi trigonometri bagi graf tersebut dalam bentuk $y = a \sin bx + c$.



Bulatan unit

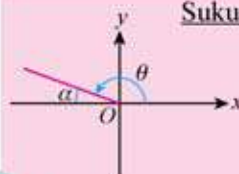


$$\begin{aligned}\sin \theta &= \text{koordinat-}y \\ \cos \theta &= \text{koordinat-}x \\ \tan \theta &= \frac{\text{koordinat-}y}{\text{koordinat-}x}\end{aligned}$$

Sudut rujukan sepadan

Katakan α ialah sudut rujukan sepadan

Suku II



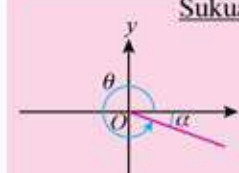
$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \theta \\ \sin \theta &= +\sin \alpha \\ \cos \theta &= -\cos \alpha \\ \tan \theta &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

Suku III



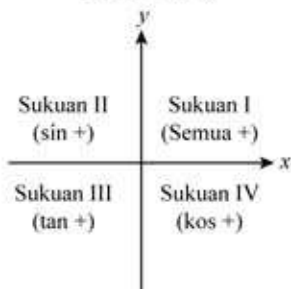
$$\begin{aligned}\alpha &= \theta - 180^\circ \\ \sin \theta &= -\sin \alpha \\ \cos \theta &= -\cos \alpha \\ \tan \theta &= +\tan \alpha\end{aligned}$$

Suku IV



$$\begin{aligned}\alpha &= 360^\circ - \theta \\ \sin \theta &= -\sin \alpha \\ \cos \theta &= +\cos \alpha \\ \tan \theta &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

Tanda nilai $\sin \theta$, $\cos \theta$ dan $\tan \theta$



Sinus, Kosinus dan Tangen

Graf $\sin x$, $\cos x$ dan $\tan x$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Bentuk graf			
Nilai maksimum	1	1	∞
Nilai minimum	-1	-1	$-\infty$
Pintasan-x	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$	$90^\circ, 270^\circ$	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
Pintasan-y	0	1	0

Refleksi



Pada akhir bab ini, saya dapat

membuat dan menentusahkan konjektur tentang nilai sinus, kosinus dan tangen sudut dalam sukuan II, III dan IV dengan sudut rujukan sepadan.

menentukan nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sudut dalam sukuan II, III dan IV berdasarkan sudut rujukan sepadan.

menentukan sudut apabila nilai sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut diberi.

menyelesaikan masalah yang melibatkan sinus, kosinus dan tangen.

melukis graf fungsi trigonometri, $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan $y = \tan x$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ dan membandingbezakan ciri-ciri graf fungsi tersebut.

mengkaji dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan pemalar a , b dan c bagi graf fungsi trigonometri:

(i) $y = a \sin bx + c$

(ii) $y = a \cos bx + c$

(iii) $y = a \tan bx + c$

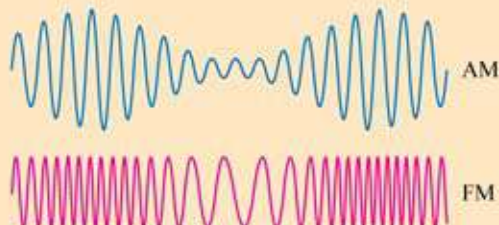
bagi $a > 0$, $b > 0$.

menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi sinus, kosinus dan tangen.

PROJEK MINI

Siaran radio merupakan contoh komunikasi elektronik yang senang didapati pada masa ini. Bunyi seperti muzik dan suara yang kita dengar dari radio disiarkan dalam bentuk gelombang. Dalam kes radio AM, bunyi disiarkan melalui modulasi amplitud manakala bagi radio FM, bunyi disiarkan melalui modulasi frekuensi.

Dalam kumpulan berempat, buat satu laporan ringkas yang menjelaskan perbezaan antara modulasi amplitud dengan modulasi frekuensi berdasarkan ciri-ciri graf fungsi trigonometri yang telah anda pelajari. Anda digalakkan menggunakan graf, jadual dan peta pemikiran yang sesuai untuk mempersembahkan laporan kumpulan anda.



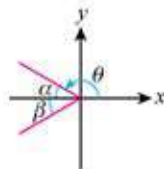


FAHAM

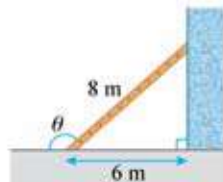
1. Nyatakan hubungan setiap fungsi trigonometri yang berikut dengan sudut rujukan sepadan.
(a) $\tan 154^\circ$ (b) $\sin 234^\circ$ (c) $\cos 314^\circ$
2. Tentukan nilai setiap sudut berikut berdasarkan sudut rujukan sepadan.
(a) $\cos 116^\circ$ (b) $\tan 211^\circ 38'$ (c) $\sin 305.6^\circ$
3. Diberi $\tan \theta = -0.7265$ dan $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, hitung sudut θ .
4. Lakar graf $y = \cos x$ bagi $90^\circ \leq x \leq 270^\circ$.

MASTERI

5. Nyatakan nilai maksimum dan nilai minimum bagi graf fungsi $y = 3 \sin 2x - 1$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
6. Dalam rajah di sebelah, $\theta = 150^\circ$ dan $\alpha = \beta$. Tentukan nilai
(a) $\cos \alpha$
(b) $\tan \beta$

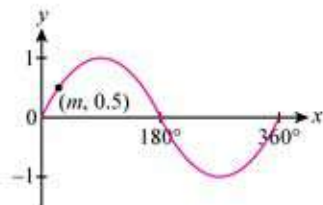


7. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang kayu dengan panjang 8 m disandarkan pada dinding tegak. Jarak mengufuk dari dinding ke kayu itu ialah 6 m. Hitung nilai $\sin \theta$.

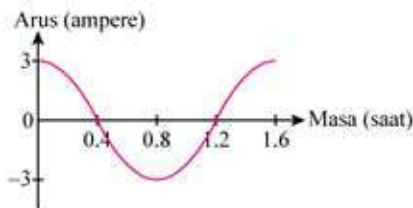


8. Lakar graf fungsi $y = 3 \sin 2x + 1$ bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

9. Rajah di sebelah menunjukkan graf suatu fungsi trigonometri bagi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
(a) Nyatakan fungsi trigonometri tersebut.
(b) Tentukan nilai m .

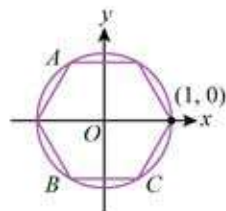


10. Rajah di sebelah menunjukkan graf yang diperoleh pada skrin sebuah osiloskop apabila suatu bekalan arus ulang alik disambungkan kepadanya.
(a) Apakah jenis fungsi trigonometri yang diwakili oleh graf itu?
(b) Nyatakan amplitud arus itu.
(c) Nyatakan tempoh arus itu.

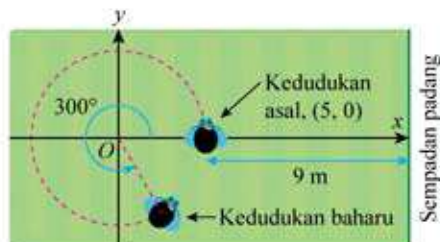


CABAR

11. Satu heksagon sekata dilukis di dalam bulatan unit seperti ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Jika satu daripada bucu heksagon itu berada pada $(1, 0)$, tentukan koordinat bucu A , B dan C .



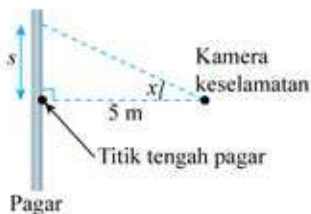
12. Pasukan pancaragam sekolah anda membuat persembahan di padang. Ahli-ahli pancaragam membuat formasi berbentuk bulatan dengan diameter 10 m. Andaikan anda seorang daripada ahli pancaragam tersebut dan kedudukan asal anda ialah 9 m dari sempadan padang. Anda bergerak dan kedudukan baharu anda adalah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Jika anda dikehendaki bergerak ke sempadan padang dari kedudukan baharu anda, berapakah jarak terpendek, dalam m, yang akan anda lalui?



13. Jadual di bawah menunjukkan ketinggian kedudukan Ming Seng dari tanah mengufuk semasa dia menaiki roda Ferris.

Masa (minit)	0	2	4	6	8
Tinggi (m)	20	31	20	9	20

- (a) Berdasarkan jadual di atas, nyatakan jenis fungsi trigonometri yang boleh mewakilinya.
 (b) Seterusnya, jika y ialah ketinggian kedudukan Ming Seng dari tanah mengufuk, dalam m, dan x ialah masa dalam minit, lakarkan graf dan nyatakan fungsi trigonometri yang mewakili maklumat di atas.
14. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kamera keselamatan di depan pagar sebuah pangsapuri. Kamera itu dipasang pada tiang yang terletak 5 m dari titik tengah pagar. Tulis satu fungsi trigonometri yang mengungkapkan jarak, s , dalam m, di sepanjang pagar dari titik tengahnya dalam sebutan x .



TEROKAI MATEMATIK

Tahukah anda bahawa fungsi trigonometri boleh diaplikasikan semasa memprogramkan lompatan sesuatu watak dalam permainan komputer?

Cuba kaitkan corak pergerakan watak dalam permainan komputer dengan fungsi trigonometri. Dapatkan maklumat yang berkaitan daripada sumber yang sah seperti menemu ramah seorang pengatur cara, merujuk bahan bacaan atau lain-lain. Tulis satu jurnal ringkas mengenai

- ciri-ciri fungsi trigonometri,
- penggunaan fungsi trigonometri dalam permainan komputer,
- dua contoh lain aplikasi kehidupan sebenar yang melibatkan fungsi trigonometri.