

BAB 6

Sudut dan Tangen bagi Bulatan



Apakah yang akan anda pelajari?

- 6.1 Sudut pada Lilitan dan Sudut Pusat yang Dicangkum oleh Suatu Lengkuk
- 6.2 Sisi Empat Kitaran
- 6.3 Tangen kepada Bulatan
- 6.4 Sudut dan Tangen bagi Bulatan

Kenapa Belajar Bab Ini?

- Bulatan merupakan suatu bentuk yang unik dan mempunyai ciri-ciri yang istimewa. Keunikan bentuk bulat membolehkan bulatan digunakan dalam pelbagai bidang.
- Konsep sudut dan tangen bagi bulatan digunakan dalam bidang perindustrian, pembinaan jalan raya, lukisan, astronomi, sukan dan sebagainya.

Acara lontar peluru merupakan satu acara olahraga. Kawasan melontar berbentuk bulatan dengan diameter 2.135 m. Bulatan tersebut dibahagi kepada dua bahagian atau dua semi bulatan dengan garisan putih setebal 50 mm. Dua garis lurus dilukis dari pusat bulatan yang bersudut 40° di antara satu sama lain untuk menentukan kawasan lontaran.

Muhammad Ziyad Zolkefli ialah seorang atlet paralimpik negara. Beliau meraih pingat emas acara lontar peluru T20 pada Kejohanan Olahraga Antarabangsa Fazza ke-10, Grand Prix (GP) olahraga Para Dunia di Dubai, Emiriah Arab Bersatu.

Pernahkah anda menyertai acara melontar peluru?



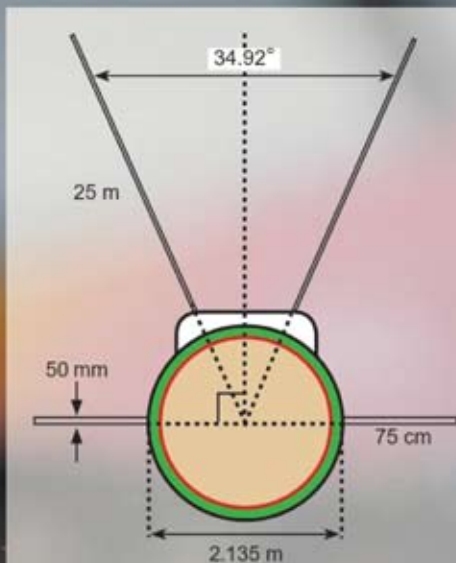


Eksplorasi Zaman

Thales dan Phythagoras merupakan antara ahli matematik Greek yang terkenal. Teorem Thales menyatakan bahawa apabila ketiga-tiga bucu suatu segi tiga menyentuh lilitan bulatan dan satu daripada sisi segi tiga itu ialah diameter, maka sudut pada lilitan yang dicangkumi oleh diameter ialah 90° . Teori ini berasal daripada pengaruh Mesir Purba, India dan Mesopotamia. Bulatan telah dikaji oleh ahli matematik purba kerana bentuk ini dianggap sebagai suatu bentuk yang lengkap.



<http://yakini-pelajar.com/Eksplorasi%20Zaman/Bab%206/>



GERBANG KATA

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| • diameter | • <i>diameter</i> |
| • lengkok | • <i>arc</i> |
| • lilitan | • <i>circumference</i> |
| • paksi simetri | • <i>axis of symmetry</i> |
| • perentas | • <i>chord</i> |
| • semi bulatan | • <i>semicircle</i> |
| • simetri | • <i>symmetry</i> |
| • tangen | • <i>tangent</i> |
| • tembereng selang-seli | • <i>alternate segments</i> |
| • titik ketangenan | • <i>point of tangency</i> |

Apakah sudut-sudut pada lilitan suatu bulatan?

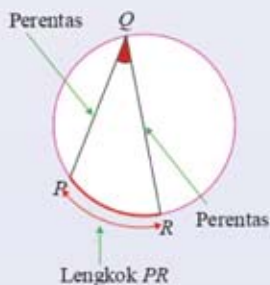
Bulatan merupakan suatu bentuk dua dimensi yang unik. Hal ini kerana bilangan sisi bulatan adalah tidak terhingga. Keistimewaan dan keunikan bentuk bulatan ini membolehkan objek yang berbentuk bulat seperti roda bergerak dengan mudah. Adakah anda pernah lihat roda kenderaan dalam bentuk lain?



Sudut-sudut yang terbentuk dalam bulatan juga mempunyai ciri-ciri tersendiri.

Rajah 1 menunjukkan dua perentas, PQ dan QR yang bertemu di titik Q pada lilitan bulatan.

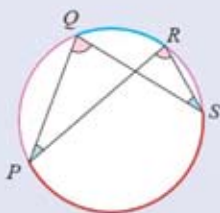
$\angle PQR$ ialah sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok PR .



Rajah 1

Dalam Rajah 2,

- $\angle PQS$ dan $\angle PRS$ ialah sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok major PS .
- $\angle QPR$ dan $\angle QSR$ ialah sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok minor RQ .



Rajah 2

STANDARD PEMBELAJARAN

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan antara sudut-sudut pada lilitan dengan sudut pusat yang dicangkum oleh lengkok tertentu, dan seterusnya menggunakan hubungan tersebut untuk menentukan nilai sudut dalam bulatan.

SUDUT DISKUSI

Cuba bandingkan roda di bawah. Bincang dalam kelas, roda basikal yang manakah akan membolehkan anda sampai ke destinasi anda dengan lebih cepat?



IMBAS KEMBALI



Adakah sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama adalah sama besar?

Cetusan Minda 1



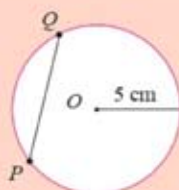
Berkumpulan

Tujuan: Menentusahkan sudut-sudut pada lilitan yang dicangkum oleh lengkok yang sama adalah sama besar.

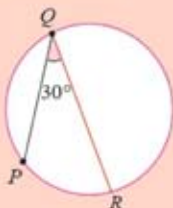
Bahan: Kertas A4, jangka lukis, protractor, pembaris, pensel

Langkah:

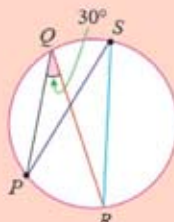
1. Lukis satu bulatan yang berjejari 5 cm. Lukis satu perentas PQ (Rajah 1).
2. Lukis perentas QR yang membentuk 30° pada titik Q (Rajah 2). Kumpulan lain digalakkan untuk membentuk sudut tirus di antara 20° hingga 40° .
3. Tandakan titik S pada lilitan dan lukis perentas PS dan perentas RS (Rajah 3).
4. Ukur $\angle PSR$ dan catatkan pada jadual.
5. Ulangi langkah 3 dengan titik T dan perentas PT dan perentas RT (Rajah 4).
6. Ukur $\angle PTR$ dan catatkan pada jadual.



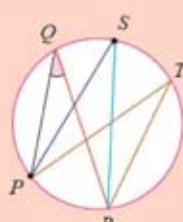
Rajah 1



Rajah 2



Rajah 3



Rajah 4

$\angle PQR$	$\angle PSR$	$\angle PTR$		
30°				

7. Anda boleh ulangi langkah 3 dengan titik-titik lain pada lengkok major PR . Ukur sudut yang terbentuk dan catatkan pada jadual.
8. Tampil hasil dapatan kumpulan anda di sudut matematik. Nyatakan pendapat anda berkaitan hasil dapatan kumpulan lain.

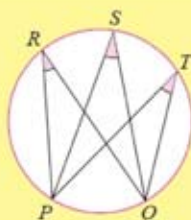
Perbincangan:

Apakah yang boleh anda nyatakan tentang sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok PR ?

Hasil daripada Cetusan Minda 1, didapati bahawa;

Sudut-sudut yang dicangkum oleh lengkok PR , iaitu $\angle PQR$, $\angle PSR$ dan $\angle PTR$ adalah sama.

Secara generalisasi,



Sudut-sudut pada suatu lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama adalah sama besar.

$$\angle PRQ = \angle PSQ = \angle PTQ$$

Anda juga boleh menggunakan perisian dinamik untuk menentusahkan ciri-ciri sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama.

Cetusan Minda 2



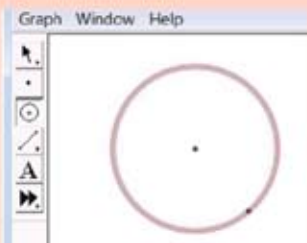
Berpasangan

Tujuan: Menentusahkan sudut-sudut pada lilitan yang dicangkum oleh lengkok yang sama adalah sama besar.

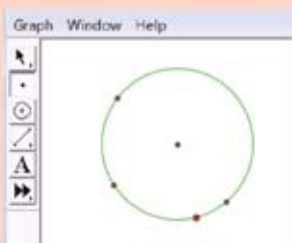
Bahan: Perisian dinamik

Langkah:

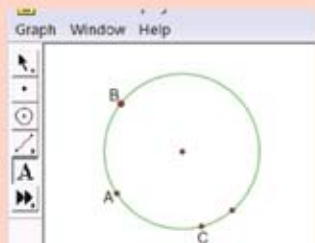
1. Mulakan dengan *New Sketch* dan klik pada *Compass Tool* untuk melukis satu bulatan (Rajah 1).
2. Klik pada *Point Tool* dan tandakan tiga titik (Rajah 2).
3. Klik pada *Text Tool* dan labelkan tiga titik yang ditanda pada langkah 2 (Rajah 3).



Rajah 1

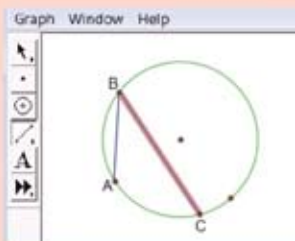


Rajah 2

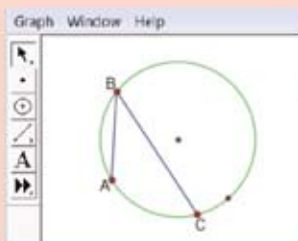


Rajah 3

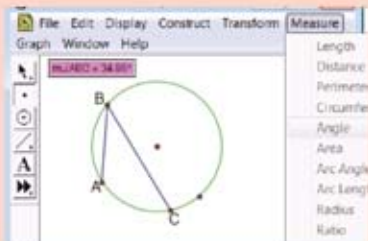
4. Klik pada *Straightedge Tool* dan lukis dua garis lurus yang menyambungkan titik A dan titik B serta titik B dan titik C (Rajah 4).
5. Klik pada *Selection Arrow Tool* dan klik pada titik-titik A, B dan C (Rajah 5).
6. Klik *Measure* dan pilih *Angle*. Klik dan nilai $\angle ABC$ akan dipaparkan (Rajah 6).



Rajah 4

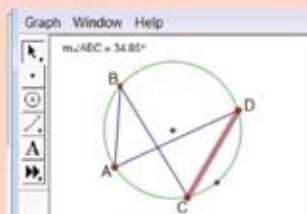


Rajah 5

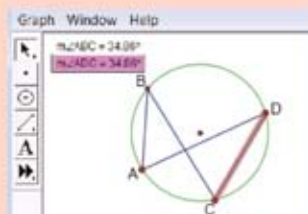


Rajah 6

- Ulangi langkah 2 hingga 4 untuk tanda titik D dan langkah 5 untuk memilih titik-titik A , D dan C (Rajah 7).
- Ulangi langkah 6. Nilai $\angle ADC$ akan dipaparkan (Rajah 8). Perhatikan nilai $\angle ABC$ dan $\angle ADC$ adalah sama.
- Anda boleh cuba dengan titik lain yang diletakkan pada lengkok major AC untuk menentukan nilai sudut pada lilitan bulatan.



Rajah 7



Rajah 8

Perbincangan:

Apakah yang boleh dirumuskan daripada pemerhatian anda dalam aktiviti di atas?

Hasil daripada Cetusan Minda 2, didapati bahawa;

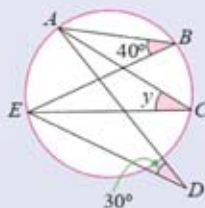
Sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama adalah sama besar.

Contoh 1

Berdasarkan rajah di sebelah, hitung nilai y .

Penyelesaian:

$$y = \angle ABE = 40^\circ$$

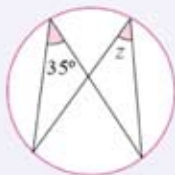


BULETIN

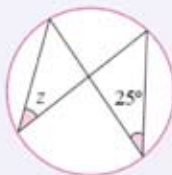
$y = \angle ABE = 40^\circ$.
 $\angle ADE \neq 40^\circ$ kerana
 $\angle ADE$ bukan sudut
 pada lilitan bulatan yang
 dicangkum oleh lengkok
 AE.

1. Hitung nilai z .

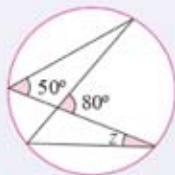
(a)



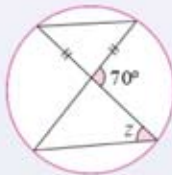
(b)



(c)



(d)



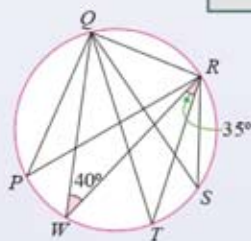
2. Dalam rajah di sebelah perentas $QW = RW$.
Diberi bahawa $\angle QWR = 40^\circ$ dan $\angle WRT = 35^\circ$.
Tentukan nilai

(a) $\angle QSR$

(b) $\angle WQT$

(c) $\angle WRQ$

(d) $\angle QRT$



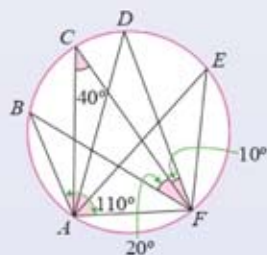
3. Dalam rajah di sebelah, $\angle BAF = 110^\circ$, $\angle ACF = 40^\circ$,
 $\angle CFD = 10^\circ$ dan $\angle BFC = 20^\circ$. Tentukan nilai

(a) $\angle ABF$

(b) $\angle BFA$

(c) $\angle CAD$

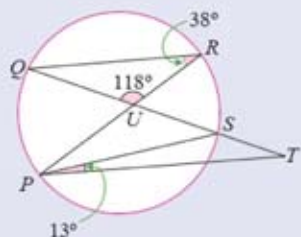
(d) $\angle DAF$



4. Dalam rajah di sebelah, $\angle QRP = 38^\circ$, $\angle QUR = 118^\circ$
dan $\angle SPT = 13^\circ$. Tentukan nilai

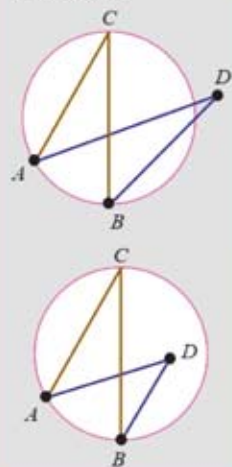
(a) $\angle RPS$

(b) $\angle PTQ$



SUDUT DISKUSI

Adakah
 $\angle ADB = \angle ACB$?
Bincangkan.



Adakah sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama panjang adalah sama besar dan adakah sudut-sudut pada lilitan bulatan berkadaran dengan panjang lengkok yang dicangkum?

Cetusan Minda 3



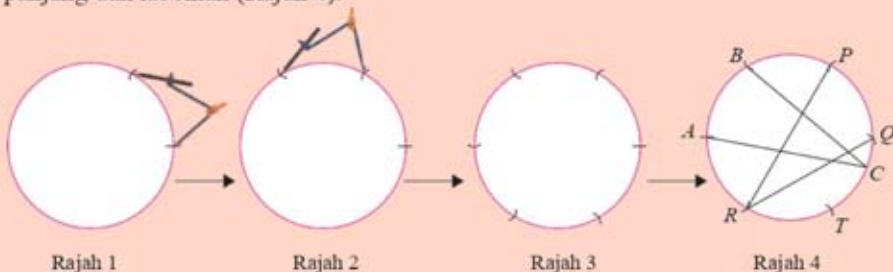
Berkumpulan

- Tujuan:**
1. Menentusahkan sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok sama panjang adalah sama besar.
 2. Sudut-sudut pada lilitan bulatan adalah berkadaran dengan panjang lengkok yang dicangkum.

Bahan: Jangka lukis, protractor, pensel, pembaris dan kertas A4.

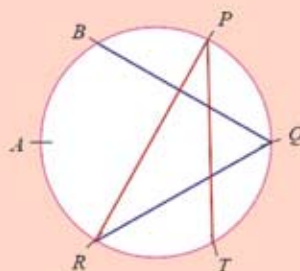
Langkah:

1. Lukis satu bulatan dengan jejari 5 cm. Tanpa mengubah bukaan jangka lukis, bahagikan lilitan bulatan kepada enam bahagian (Rajah 1 – Rajah 3).
2. Lukiskan dua sudut pada lilitan yang dicangkum oleh dua bahagian berlainan yang sama panjang dan labelkan (Rajah 4).



3. Ukur $\angle BCA$ dan $\angle PRQ$. Catatkan dalam jadual.
4. Ulangi langkah 1. Lukiskan perentas dengan panjang lengkok yang berlainan (Rajah 5). Ukur $\angle RPT$ dan $\angle BQR$. Catatkan dalam jadual.

Lengkok		Lengkok	
BA	PQ	RT	$BR = 2RT$
$\angle BCA$	$\angle PRQ$	$\angle RPT$	$\angle BQR$



Rajah 5

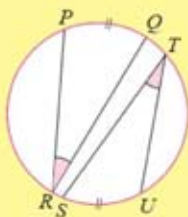
Perbincangan:

1. Apakah kesimpulan anda berkaitan sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama panjang?
2. Apakah kesimpulan anda berkaitan kesan perubahan panjang lengkok kepada sudut-sudut yang dicangkum pada lilitan bulatan?

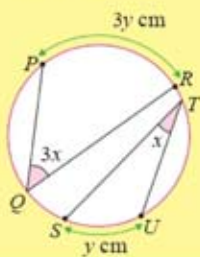
Daripada Cetusan Minda 3, didapati bahawa;

- (a) $\angle BCA = \angle PRQ$ [Panjang lengkok $AB =$ Panjang lengkok PQ].
- (b) $\angle BQR = 2 \times \angle RPT$ [Panjang lengkok $BR = 2 \times$ Panjang lengkok RT].

Secara generalisasi,



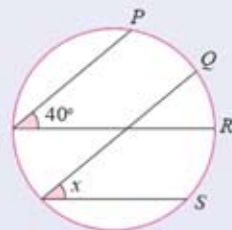
Sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama panjang adalah sama saiz. Jika panjang lengkok $PQ =$ panjang lengkok SU maka, $\angle PRQ = \angle STU$.



Saiz sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh suatu lengkok adalah berkadaran dengan panjang lengkok tersebut.

Contoh 2

Rajah di sebelah menunjukkan bulatan dengan panjang lengkok $PR = QS$. Tentukan nilai x . Berikan alasan untuk jawapan anda.



Penyelesaian:

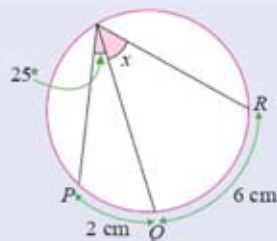
$x = 40^\circ$ kerana $\angle x$ dan $\angle 40^\circ$ berada pada lilitan bulatan dan panjang lengkok $PR = QS$.

Contoh 3

Berdasarkan rajah di sebelah, tentukan nilai x .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{x}{25^\circ} &= \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} \\ x &= 3(25^\circ) \\ x &= 75^\circ \end{aligned}$$



Contoh 4

Diberi panjang lengkok minor PS ialah dua kali panjang lengkok QR . Tentukan nilai x .

Penyelesaian:

$$\angle PTS = 180^\circ - 2(48^\circ)$$

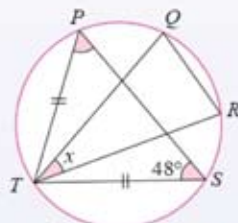
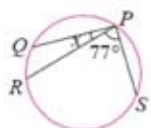
$$\angle PTS = 84^\circ$$

$$\text{Maka, } x = \frac{84^\circ}{2}$$

$$x = 42^\circ$$

Jumlah sudut pedalaman suatu segi tiga ialah 180° .

$$QR = \frac{PS}{2}$$

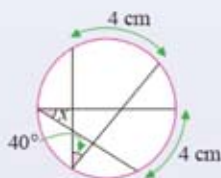

KUIZ


Jika panjang lengkok $RS = \frac{7}{2}QR$, tentukan nilai x .

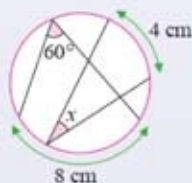
UJI MINDA 6.1b

1. Berdasarkan rajah-rajah di bawah, hitung nilai x .

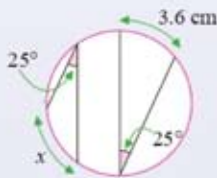
(a)



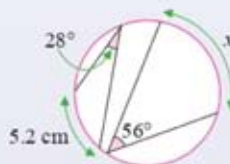
(b)



(c)



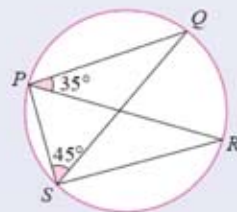
(d)



2. Rajah di sebelah menunjukkan suatu bulatan. Diberi bahawa panjang lengkok $RS = 2QR$, $\angle QPR = 35^\circ$ dan $\angle PSQ = 45^\circ$. Tentukan nilai

(a) $\angle SPR$

(b) $\angle SRP$

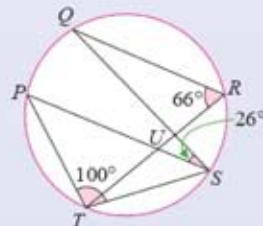


3. Dalam rajah di sebelah lengkok $QPT = 3RS$. Diberi bahawa $\angle QRT = 66^\circ$, $\angle QST = 26^\circ$ dan $\angle PTS = 100^\circ$. Tentukan nilai

(a) $\angle RQS$

(b) $\angle TUS$

(c) $\angle TPS$



Apakah hubungan antara sudut pada pusat bulatan dengan sudut pada lilitan yang dicangkum oleh suatu lengkok?

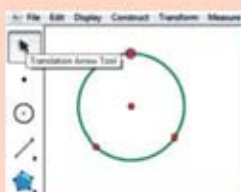
Cetusan Minda 4 Berpasangan

Tujuan: Menentukan hubungan antara sudut pada pusat bulatan dengan sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh suatu lengkok.

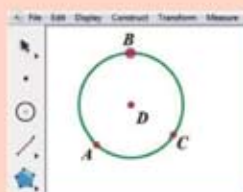
Bahan: Perisian dinamik

Langkah:

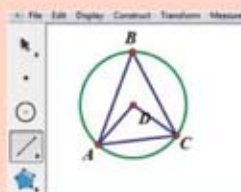
1. Mulakan dengan *New Sketch* dan klik pada *Compass Tool* untuk melukis suatu bulatan.
2. Gunakan *Point Tool* untuk meletakkan tiga titik di sekitar lilitannya (Rajah 1).
3. Gunakan *Text Tool* untuk melabelkan semua titik pada bulatan tersebut dengan A , B , C dan di pusat sebagai D (Rajah 2).
4. Gunakan *Straightedge Tool* untuk membina garis dari satu titik ke titik lain (Rajah 3).



Rajah 1

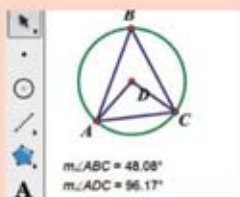


Rajah 2

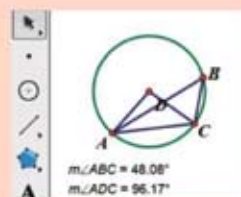


Rajah 3

5. Gunakan *Selection Arrow Tool* untuk memilih titik A , B , dan C .
6. Klik pada menu *Measure* dan pilih *Angle*. Nilai $\angle ABC$ akan dipaparkan.
7. Ulangi langkah 5 dan 6 untuk mendapatkan $\angle ADC$. Nilai $\angle ADC$ akan dipaparkan (Rajah 4).



Rajah 4



Rajah 5

8. Apakah hubungan antara $\angle ABC$ dengan $\angle ADC$?
9. Klik pada titik B dan gerakkannya di sepanjang lilitan bulatan itu seperti pada Rajah 5. Adakah nilai $\angle ABC$ masih sama seperti yang diperoleh pada langkah 6?

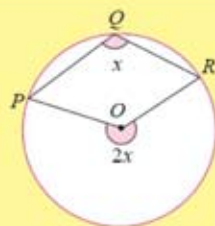
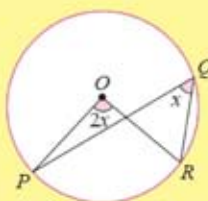
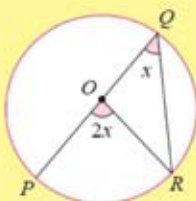
Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda berkaitan hubungan antara sudut pada pusat bulatan dengan sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama?

Daripada Cetusan Minda 4, didapati bahawa:

- (a) $\angle ADC = 2 \times \angle ABC$
- (b) Nilai $\angle ABC$ tetap walaupun titik B digerakkan sepanjang lilitan bulatan.

Secara generalisasi,



Saiz sudut pada pusat bulatan yang dicangkum oleh suatu lengkok yang sama ialah dua kali ganda saiz sudut pada lilitan bulatan.

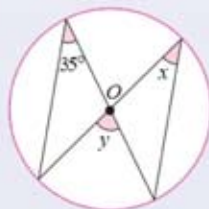
Contoh 5

Tentukan nilai x dan nilai y bagi setiap yang berikut.

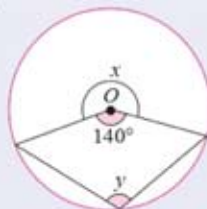
(a)



(b)



(c)



Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x &= \frac{1}{2}(80^\circ) \\ x &= 40^\circ \\ y &= 40^\circ \end{aligned}$$

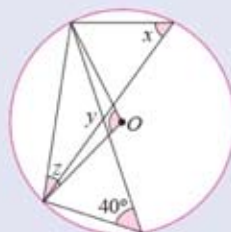
$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad x &= 35^\circ \\ y &= 2(35^\circ) \\ y &= 70^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad x &= 360^\circ - 140^\circ \\ x &= 220^\circ \\ y &= \frac{1}{2}(220^\circ) \\ y &= 110^\circ \end{aligned}$$

UJI MINDA 6.1c

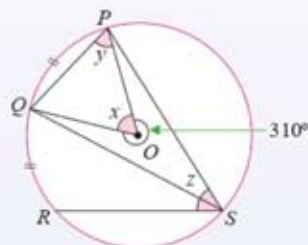
- Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Tentukan nilai

- (a) x
- (b) y
- (c) z



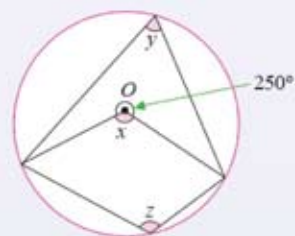
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa panjang lengkok $PQ = QR$ dan sudut major $POQ = 310^\circ$. Hitung nilai

- (a) x
(b) y
(c) z



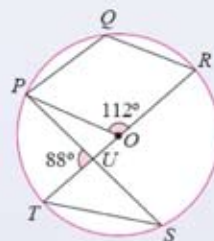
3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Hitung nilai

- (a) x
(b) y
(c) z



4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa $\angle POR = 112^\circ$ dan $\angle PUT = 88^\circ$. Tentukan nilai

- (a) $\angle PQR$
(b) $\angle UST$
(c) $\angle RTS$



Adakah sudut-sudut pada pusat bulatan berkadaran dengan panjang lengkok yang dicangkum?

Anda telah pelajari bahawa:

1. Sudut-sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh lengkok yang sama panjang adalah sama saiz.
2. Saiz sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh suatu lengkok adalah berkadaran dengan panjang lengkok tersebut.

Kedua-dua konsep di atas juga boleh diaplikasi untuk sudut pada pusat bulatan. Secara generalisasi,

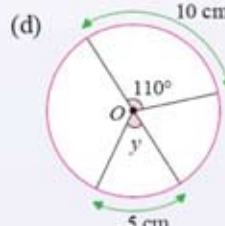
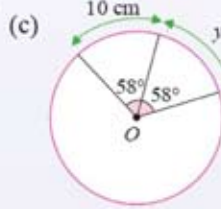
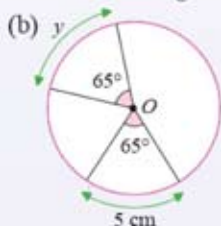
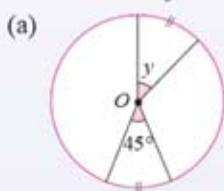


Bagi sudut-sudut pada pusat bulatan yang dicangkum oleh suatu lengkok;

- (a) saiz sudut adalah sama jika panjang lengkok sama.
(b) perubahan saiz sudut adalah berkadaran dengan perubahan panjang lengkok.

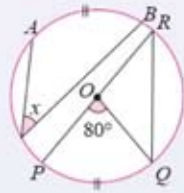
UJI MINDA 6.1d

1. Berdasarkan rajah-rajah di bawah, hitung nilai y .



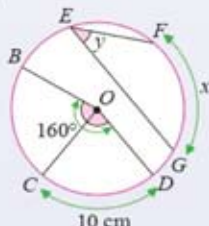
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O dengan panjang lengkok $AB = PQ$. Tentukan

- (a) nilai x
(b) sudut yang sama nilai dengan x



3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa panjang lengkok $CD = 10$ cm dan $\angle BOD = 160^\circ$. Jika panjang lengkok $BCD = 2CD$ dan $\angle FEG = \frac{1}{4} \angle BOD$, tentukan

- (a) nilai y
(b) panjang x , dalam cm



Apakah nilai sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh diameter?

Cetusan Minda 5



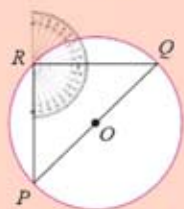
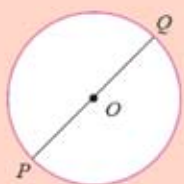
Berpasangan

Tujuan: Menentukan sudut yang dicangkum oleh diameter.

Bahan: Jangka lukis, protaktor, pensel, pembaris dan kertas lukisan.

Langkah:

1. Lukiskan sebuah bulatan berpusat di O dan diameter PQ seperti di sebelah.
2. Lukiskan dua perentas, PR dan QR seperti rajah di sebelah. Ukur nilai $\angle PRQ$.
3. Ubah kedudukan titik R pada lilitan bulatan. Ukur nilai $\angle PRQ$ yang baru.



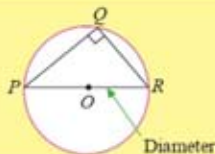
Perbincangan:

1. Apakah yang boleh anda rumuskan tentang nilai $\angle PRQ$ apabila kedudukan titik R diubah pada lilitan bulatan?
2. Berapakah nilai sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh diameter?

Hasil daripada Cetusan Minda 5, didapati bahawa;

Bagi semua kedudukan titik R pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh diameter PQ , nilai $\angle PRQ$ ialah 90° .

Secara generalisasi,



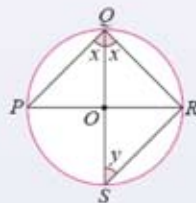
Sudut pada lilitan bulatan yang dicangkum oleh diameter ialah 90° . Jika PQR ialah semi bulatan maka, $\angle PQR = 90^\circ$.

SUDUT DISKUSI

Adakah diameter merupakan satu perentas? Bincangkan.

Contoh 6

Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O dengan titik-titik P, Q, R dan S terletak pada lilitan bulatan. Diberi bahawa PR dan QS ialah diameter. Hitung nilai y .



Penyelesaian:

$$PR = QS$$

$$\text{Maka, } 2x = 90^\circ$$

$$x = 45^\circ$$

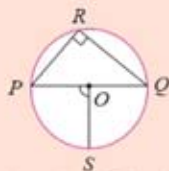
$$y + x + \angle QRS = 180^\circ$$

$$y + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ$$

$$y = 45^\circ$$

BULETIN

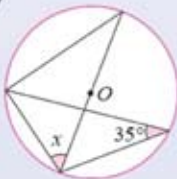


Jika lengkok $PRQ = 2PS$ maka, $\angle PRQ = \angle POS$

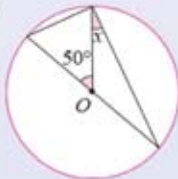
UJI MINDA 6.1e

1. Rajah-rajah di bawah menunjukkan bulatan berpusat di O . Hitung nilai x .

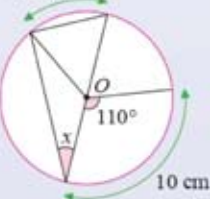
(a)



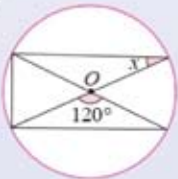
(b)



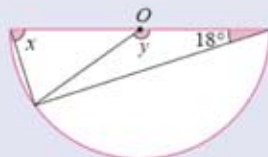
(c)



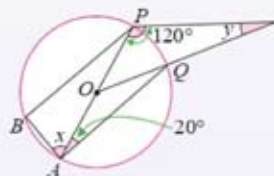
(d)



2. Rajah di sebelah menunjukkan semi bulatan dengan pusat di O . Tentukan nilai $x + y$.



3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Jika panjang lengkok $AB = PQ$, hitung nilai $x + y$.



- Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah sudut dalam bulatan?

Contoh 7

Sebuah arca dibina dalam bentuk bulatan berpusat di O seperti pada rajah di sebelah. Titik-titik pada lilitan membentuk lengkok PQ yang sama panjang dengan lengkok QR . Garis SQ melalui O . Tentukan nilai

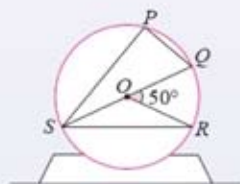
- (a) $\angle QSR$
(b) $\angle PQS$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \angle QSR &= \frac{1}{2} \angle QOR \\ &= \frac{1}{2} (50^\circ) \\ &= 25^\circ \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{(b) } \angle PSQ &= \angle QSR = 25^\circ \\ \angle PQS + 90^\circ + 25^\circ &= 180^\circ \\ \angle PQS &= 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ \\ &= 65^\circ \end{aligned}$$

STANDARD PEMBELAJARAN

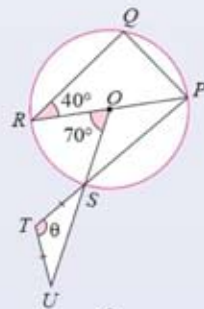
Menyelesaikan masalah yang melibatkan sudut dalam bulatan.



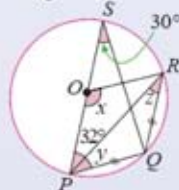
UJI MINDA 6.1f

1. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . OSU dan PST ialah garis lurus. Diberi bahawa diameter bulatan ialah 16 cm, $\angle ROS = 70^\circ$, $\angle QRP = 40^\circ$ dan $ST = TU$.

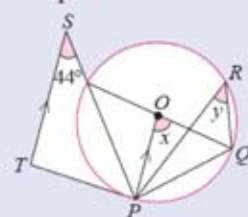
- (a) Hitung nilai θ
(b) Panjang PQ , dalam cm, betul kepada 3 angka bererti



2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa $PQ = QR$, $\angle PSQ = 30^\circ$ dan $\angle SPR = 32^\circ$. Hitung nilai $x + y + z$.



3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa TS adalah selari dengan PO dan $\angle TSP = 44^\circ$. Hitung nilai $x + y$.

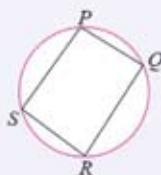


6.2 Sisi Empat Kitaran

Apakah yang anda tahu tentang sisi empat kitaran?

Sisi empat kitaran ialah suatu sisi empat dalam bulatan dengan keadaan **keempat-empat bucu sisi empat tersebut terletak pada lilitan bulatan**.

$PQRS$ pada rajah di sebelah ialah sisi empat kitaran. $\angle P$ dan $\angle R$ serta $\angle S$ dan $\angle Q$ dikenali sebagai **sudut bertentangan** dalam sisi empat kitaran.

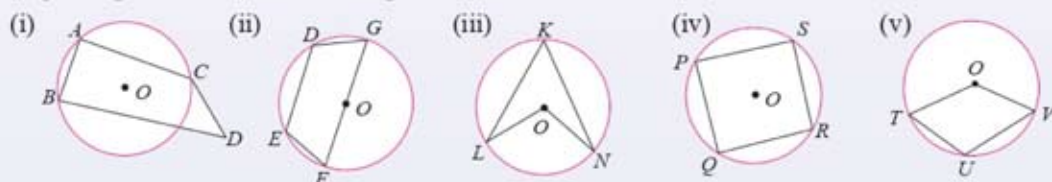


STANDARD PEMBELAJARAN

Mengenal dan memerihalkan sisi empat kitaran.

Contoh 8

Bagi setiap bulatan berikut O ialah pusat bulatan.



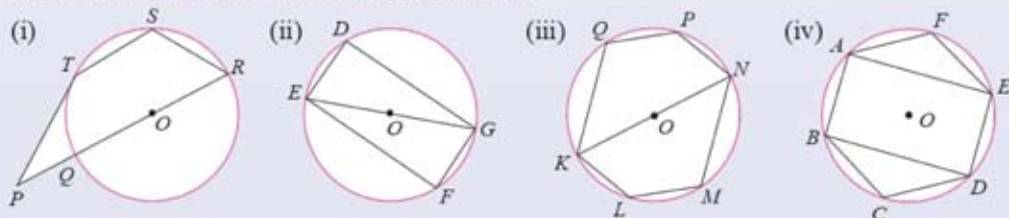
- Kenal pasti sisi empat kitaran yang terdapat dalam setiap bulatan di atas dan jelaskan jawapan anda.
- Nyatakan sudut bertentangan yang wujud dalam setiap sisi empat kitaran yang telah anda kenal pasti.

Penyelesaian:

- Bucu D tidak terletak pada lilitan maka, $ABCD$ bukan sisi empat kitaran.
 - Semua bucu terletak pada lilitan maka, $DEFG$ ialah sisi empat kitaran.
 - Bucu O tidak terletak pada lilitan maka, $KLMN$ bukan sisi empat kitaran.
 - Semua bucu terletak pada lilitan maka, $PQRS$ ialah sisi empat kitaran.
 - Bucu O tidak terletak pada lilitan maka, $OTUV$ bukan sisi empat kitaran.
- Tiada
 - $\angle D$ dan $\angle F$, $\angle E$ dan $\angle G$
 - Tiada
 - $\angle P$ dan $\angle R$, $\angle Q$ dan $\angle S$
 - Tiada

UJI MINDA 6.2a

1. Bagi setiap bulatan berikut O ialah pusat bulatan.



- Kenal pasti sisi empat kitaran yang terdapat dalam setiap bulatan di atas dan jelaskan jawapan anda.
- Nyatakan sudut bertentangan yang wujud dalam setiap sisi empat kitaran yang telah anda kenal pasti.

Apakah hubungan antara sudut-sudut pada sisi empat kitaran?

Cetusan Minda 6 Berpasangan

Tujuan: Menentukan hubungan antara sudut pedalaman yang bertentangan dalam suatu sisi empat kitaran.

Bahan: Perisian dinamik

Langkah:

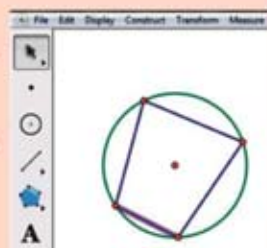
1. Mulakan dengan *New Sketch* dan klik pada *Compass Tool* untuk melukis suatu bulatan.
2. Klik pada *Straightedge Tool* untuk membina empat garis dari satu titik ke satu titik lain di lilitannya (Rajah 1).
3. Gunakan *Text Tool* untuk melabelkan semua titik yang menyambungkan garisan tersebut dengan *A*, *B*, *C* dan *D*.
4. Gunakan *Selection Arrow Tool* untuk memilih *D*, *A* dan *B*.
5. Klik pada menu *Measure* dan pilih *Angle*. $\angle DAB$ akan dipaparkan.
6. Ulangi langkah 4 dan 5 untuk mendapatkan $\angle ABC$, $\angle BCD$ dan $\angle CDA$ (Rajah 2).

Perbincangan:

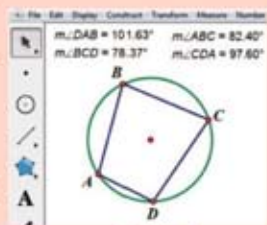
1. Apakah hubungan antara $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ dengan $\angle ADC$?
2. Buat kesimpulan tentang hubungan antara sudut lilitan tersebut.

STANDARD PEMBELAJARAN

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan antara sudut-sudut pada sisi empat kitaran, dan seterusnya menggunakan hubungan tersebut untuk menentukan nilai sudut pada sisi empat kitaran.



Rajah 1



Rajah 2

Hasil daripada Cetusan Minda 6, didapati bahawa:

- (a) $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ dan $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
- (b) Jumlah sudut pedalaman yang bertentangan dalam sisi empat kitaran ialah 180° .

Secara generalisasi,



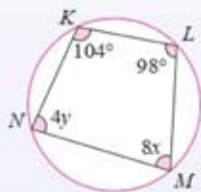
Hasil tambah sudut-sudut yang bertentangan dalam suatu sisi empat kitaran ialah 180° .

$$\angle x + \angle y = 180^\circ \text{ dan } \angle p + \angle q = 180^\circ$$

Contoh 9

Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $KLMN$. Hitung nilai

- (a) x (b) y



Penyelesaian:

- (a) Sudut-sudut pedalaman $\angle LKN$ dan $\angle LMN$ adalah bertentangan dalam sisi empat kitaran.

Maka, $\angle LKN + \angle LMN = 180^\circ$

$$104^\circ + 8x = 180^\circ$$

$$8x = 180^\circ - 104^\circ$$

$$8x = 76^\circ$$

$$x = \frac{76^\circ}{8}$$

$$x = 9.5^\circ$$

- (b) Sudut-sudut pedalaman $\angle KMN$ dan $\angle KLN$ adalah bertentangan dalam sisi empat kitaran.

Maka, $\angle KMN + \angle KLN = 180^\circ$

$$4y + 98^\circ = 180^\circ$$

$$4y = 180^\circ - 98^\circ$$

$$4y = 82^\circ$$

$$y = \frac{82^\circ}{4}$$

$$y = 20.5^\circ$$

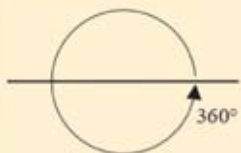


IMBAS KEMBALI

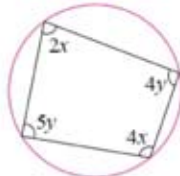
Sudut pada garis lurus ialah 180° .



Sudut satu putaran lengkap ialah 360° .



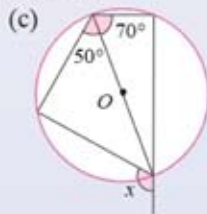
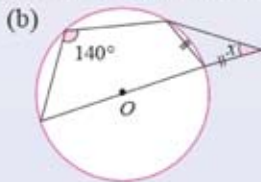
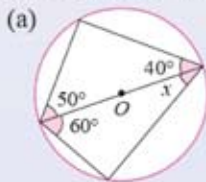
KUIZ



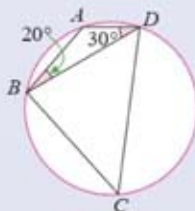
Hitung nilai $x + y$.

UJI MINDA 6.2b

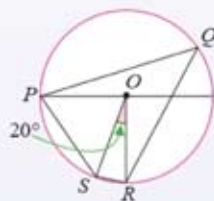
1. Rajah-rajah di bawah ialah bulatan dengan O ialah pusat bulatan. Hitung nilai x .



2. Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $ABCD$ dalam bulatan. Diberi bahawa $\angle ADB = 30^\circ$ dan $\angle ABD = 20^\circ$. Hitung nilai $\angle BCD$.

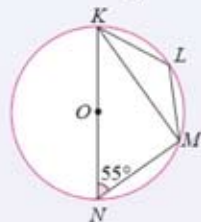


3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Jika POS ialah segi tiga sama sisi dan $\angle SOR = 20^\circ$, hitung nilai $\angle PQR$.

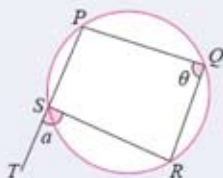


4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa $\angle KNM = 55^\circ$ dan $KL = LM$. Tentukan nilai

- (a) $\angle KLM$
(b) $\angle LMN$



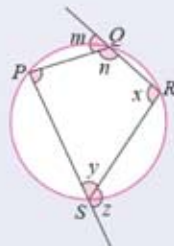
Apakah hubungan antara sudut peluaran dengan sudut pedalaman bertentangan yang sepadan?



Rajah menunjukkan sisi empat kitaran $PQRS$. Perentas PS dipanjangkan kepada T . $\angle TSR$, a , ialah **sudut peluaran** untuk sisi empat kitaran $PSRQ$. $\angle PQR$, θ , dikenali sebagai **sudut pedalaman bertentangan** yang sepadan dengan a .

Contoh 10

Dalam rajah di sebelah, $PQRS$ ialah sisi empat kitaran. Diberi bahawa m dan z ialah sudut peluaran. Nyatakan sudut pedalaman bertentangan yang sepadan dengan m dan z .



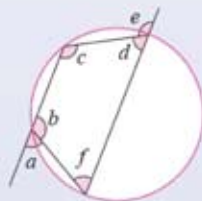
Penyelesaian:

y ialah sudut pedalaman bertentangan yang sepadan dengan m .
 n ialah sudut pedalaman bertentangan yang sepadan dengan z .

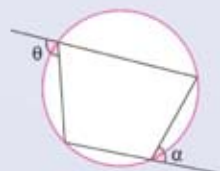
UJI MINDA 6.2c

1. Salin dan lengkapkan jadual di bawah berdasarkan rajah di sebelah.

Sudut peluaran	Sudut pedalaman bertentangan yang sepadan



2. Lukis bulatan seperti di sebelah. Labelkan sudut pedalaman bertentangan yang sepadan untuk sudut peluaran θ dan α dengan simbol p dan q masing-masing.





Bagaimanakah anda boleh menyelesaikan masalah yang melibatkan sisi empat kitaran?



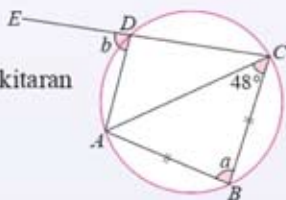
STANDARD PEMBELAJARAN

Menyelesaikan masalah yang melibatkan sisi empat kitaran.

Contoh 11

Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $ABCD$ dan garis lurus CDE . Hitung nilai

- a
- b



Penyelesaian:

$$(a) \angle ACB = \angle CAB = 48^\circ$$

$$\angle ACB + \angle CAB + a = 180^\circ$$

$$48^\circ + 48^\circ + a = 180^\circ$$

$$a = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ$$

$$a = 84^\circ$$

$$(b) b = a$$

$$\text{Maka, } b = 84^\circ$$

Contoh 12

Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $PQRS$ dan garis lurus RST . Hitung nilai $\angle PST$.

Penyelesaian:

$$\angle PQR + \angle PSR = 180^\circ$$

$$4y + 2y = 180^\circ$$

$$6y = 180^\circ$$

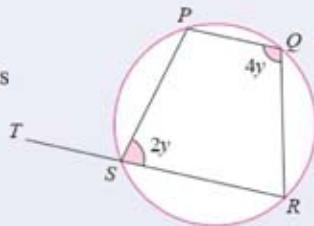
$$y = 30^\circ$$

$$\angle PST = \angle PQR$$

$$= 4y$$

$$= 4(30^\circ)$$

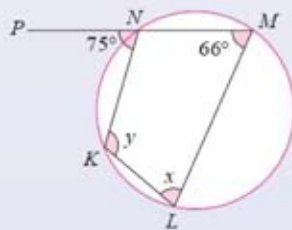
$$\angle PST = 120^\circ$$



Contoh 13

Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $KLMN$ dan garis lurus MNP . Hitung nilai

- x
- y



Penyelesaian:

- $\angle PNK$ ialah sudut peluaran. Sudut pedalaman bertentangan yang sepadan dengannya ialah sudut x .

Maka,

$$x = 75^\circ$$

- y dan $\angle NML$ ialah sudut pedalaman bertentangan dalam sisi empat kitaran $KLMN$.

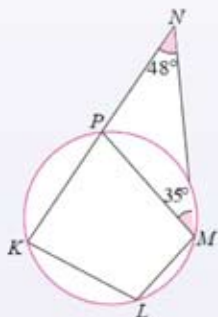
$$\text{Maka, } y = 180^\circ - \angle NML$$

$$y = 180^\circ - 66^\circ$$

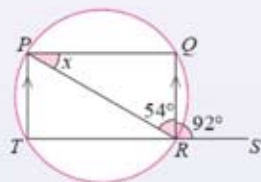
$$y = 114^\circ$$

UJI MINDA 6.2d

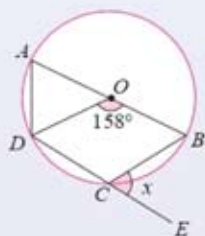
1. Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $KLMP$ dan garis lurus KPN . Diberi bahawa $\angle KNM = 48^\circ$ dan $\angle NMP = 35^\circ$. Hitung nilai $\angle MLK$.



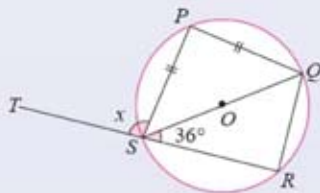
2. Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran $PQRT$ dan garis lurus TRS . Sisi-sisi PT dan QR adalah selari. Diberi bahawa $\angle PRQ = 54^\circ$ dan $\angle QRS = 92^\circ$. Hitung nilai x .



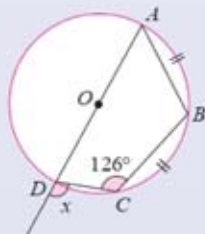
3. Dalam rajah di sebelah, sisi empat kitaran $ABCD$ terletak dalam bulatan berpusat di O . Hitung nilai x jika DCE ialah garis lurus dan $\angle DOB = 158^\circ$.



4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . $PQRS$ ialah suatu sisi empat kitaran. Diberi $\angle QSR = 36^\circ$. Jika panjang sisi $PS = PQ$ dan RST ialah garis lurus, hitung nilai x .



5. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa $\angle BCD = 126^\circ$, panjang lengkok $AB = BC$ dan AOD ialah garis lurus. Hitung nilai x .



6.3 Tangen Kepada Bulatan

Apakah yang anda faham tentang tangen kepada bulatan?

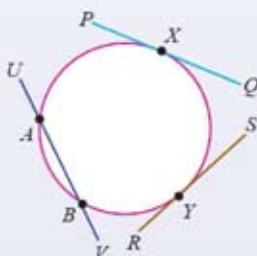
Anda telah ketahui bahawa bulatan merupakan satu bentuk yang unik dan mempunyai banyak ciri yang istimewa.

STANDARD PEMBELAJARAN

Mengenal dan memerihalkan tangen kepada bulatan.



Dalam gambar rajah di sebelah, titik T pada roda hanya akan menyentuh jalan raya sekali dalam satu pusingan penuh. Jalan raya berfungsi sebagai tangen kepada roda yang berbentuk bulat dan titik T ialah titik ketangenan apabila titik T menyentuh jalan raya.



Dalam rajah di sebelah, garis lurus PQ dan RS masing-masing menyentuh bulatan pada titik X dan titik Y . Sementara garis lurus UV melalui titik A dan titik B pada bulatan. Maka,

- (a) PQ dan RS – Tangen kepada bulatan.
- (b) X dan Y – Titik ketangenan bagi PQ dan RS , masing-masing.
- (c) UV – Bukan tangen.
- (d) A dan B – Bukan titik ketangenan bagi UV .

Tangen kepada bulatan ialah suatu garis lurus yang menyentuh bulatan tersebut pada satu titik sahaja. Titik sentuhan di antara tangen dengan bulatan ialah titik ketangenan.

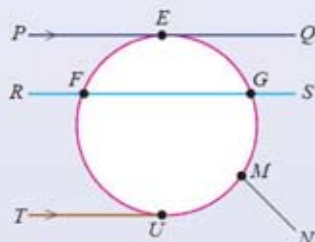
Contoh 14

Adakah semua garis lurus dan titik yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah ialah tangen kepada bulatan dan titik ketangenan? Nyatakan alasan untuk jawapan anda.

Penyelesaian:

PQ dan TU ialah tangen kepada bulatan kerana menyentuh bulatan hanya pada satu titik. Titik E dan titik U ialah titik ketangenan bagi PQ dan TU masing-masing.

RS bukan tangen kepada bulatan kerana melalui dua titik pada bulatan. Maka, titik F dan titik G bukan titik ketangenan bagi RS . MN bukan tangen kepada bulatan kerana akan menyentuh dua titik pada bulatan jika dipanjangkan. Maka, titik M bukan titik ketangenan.



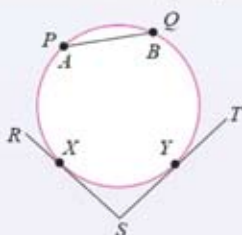
UJI MINDA 6.3a

1. Dalam rajah-rajah di bawah, kenal pasti

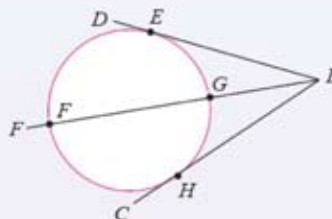
- (i) tangen (ii) titik ketangenan (iii) bukan tangen (iv) bukan titik ketangenan

Nyatakan alasan untuk jawapan anda.

(a)



(b)



Apakah yang anda tahu tentang nilai sudut di antara tangen dengan jejari bulatan pada titik ketangenan?

Cetusan Minda 7 Berpasangan

Tujuan: Mengukur sudut di antara tangen dengan jejari bulatan pada titik ketangenan.

Alatan: Perisian dinamik

Langkah:

1. Mulakan dengan *New Sketch* dan klik pada *Compass Tool* untuk melukis suatu bulatan (Rajah 1).

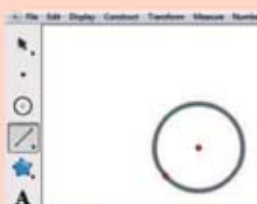
2. Klik pada *Straightedge Tool* untuk melukis satu garis lurus dari pusat bulatan ke satu titik pada lilitan (Rajah 2).

3. Klik pada *Arrow Tool* untuk memilih titik pada lilitan dan garis lurus.

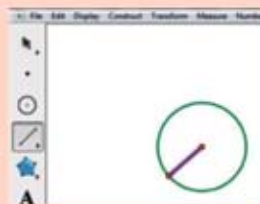
4. Klik *Construct* dan pilih *Perpendicular Line* (Rajah 3).

5. Gunakan *Point Tool* untuk tandakan titik dan labelkan kesemua titik tersebut dengan *Text tool* sebagai A, B dan C (Rajah 4).

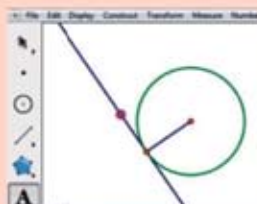
6. Gunakan *Selection Arrow Tool* untuk memilih A, B dan C.



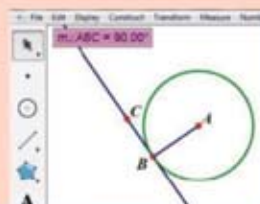
Rajah 1



Rajah 2



Rajah 3



Rajah 4

STANDARD PEMBELAJARAN

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang sudut di antara tangen dengan jejari bulatan pada titik ketangenan.

- Klik pada menu *Measure* dan pilih *Angle*. Nilai $\angle ABC$ akan dipaparkan.
- Ulangi langkah 2 hingga langkah 7 untuk melukis garis tangen di bahagian lain bulatan dan menentukan sudut di antara tangen dengan jejari pada titik ketangenan.

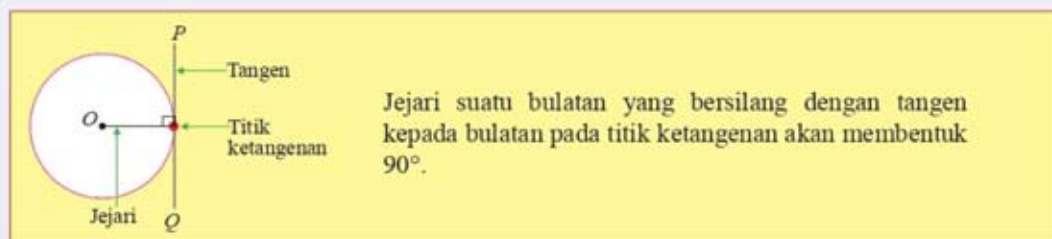
Perbincangan:

Apakah kesimpulan yang anda boleh buat tentang nilai sudut di antara tangen dengan jejari pada titik ketangenan?

Hasil daripada Cetusan Minda 7, didapati bahawa:

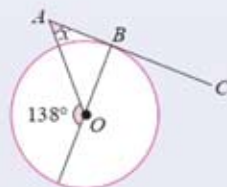
$\angle ABC = 90^\circ$ iaitu sudut di antara tangen dengan jejari yang bersilang pada titik ketangenan ialah sudut tegak.

Secara generalisasi,



Contoh 15

Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O yang bertemu dengan garis lurus ABC pada titik B sahaja. Hitung nilai x .



Penyelesaian:

Garis ABC ialah tangen kepada bulatan dan bertemu jejari bulatan di titik B . Maka, sudut $\angle OBA = 90^\circ$.

$$\angle AOB + 138^\circ = 180^\circ$$

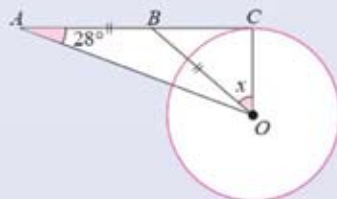
$$\begin{aligned}\angle AOB &= 180^\circ - 138^\circ \\ &= 42^\circ\end{aligned}$$

$$x + \angle AOB = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}x &= 90^\circ - \angle AOB \\ x &= 90^\circ - 42^\circ \\ x &= 48^\circ\end{aligned}$$

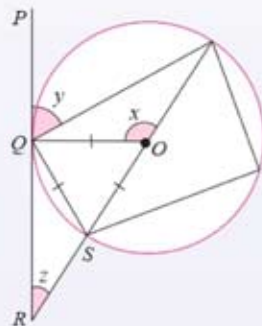
UJI MINDA 6.3b

- Dalam rajah di sebelah, ABC ialah garis lurus dan O ialah pusat bulatan. Diberi bahawa $AB = OB$ dan $\angle BAO = 28^\circ$. Hitung nilai x .



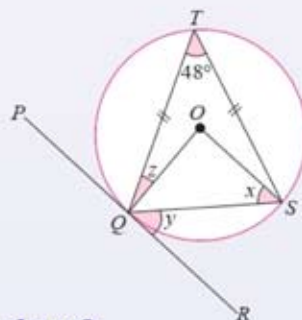
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa $\triangle OQS$ ialah segi tiga sama sisi dan PQR ialah tangen kepada bulatan. Hitung nilai

- (a) x
(b) y
(c) z



3. Dalam rajah di sebelah, O ialah pusat bulatan dan PQR ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $QT = ST$ dan $\angle QTS = 48^\circ$.

Hitung nilai $x + y + z$.



Apakah sifat-sifat berkaitan dua tangen kepada suatu bulatan?

Cefusan Minda 8



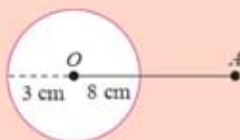
Berpasangan

Tujuan: Menentukan sifat-sifat berkaitan dua tangen kepada suatu bulatan.

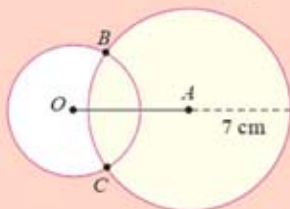
Bahan: Kertas lukisan, jangka lukis, protractor, pembaris dan pensel.

Langkah:

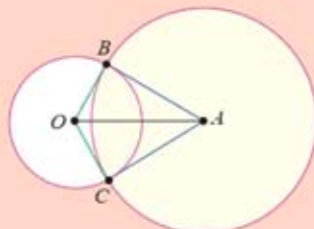
1. Lukiskan suatu bulatan berjejari 3 cm berpusat di O . Lukis satu garis lurus 8 cm dari pusat O dan labelkan sebagai OA (Rajah 1).
2. Lukiskan satu lagi bulatan berjejari 7 cm dengan titik A sebagai pusat bulatan. Tandakan titik persilangan kedua-dua bulatan sebagai B dan C (Rajah 2).
3. Lukiskan garis-garis lurus OB , OC , AB dan AC (Rajah 3).



Rajah 1



Rajah 2



Rajah 3

STANDARD PEMBELAJARAN

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang sifat-sifat berkaitan dengan dua tangen kepada suatu bulatan.

4. Ukur dan lengkapkan jadual di bawah.

$\angle AOB$	$\angle AOC$	$\angle OBA$	$\angle OCA$	$\angle OAB$	$\angle OAC$	Panjang			
						OB	OC	AB	AC

5. Tampil hasil dapatan kumpulan anda di sudut matematik. Bandingkan jawapan kumpulan anda dengan kumpulan lain.

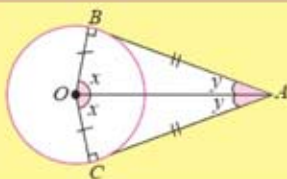
Perbincangan:

Apakah kesimpulan anda berkaitan pasangan $\angle AOB$ dan $\angle AOC$, $\angle OBA$ dan $\angle OCA$, $\angle OAB$ dan $\angle OAC$ serta panjang garis OB , OC , AB dan AC ?

Hasil daripada Cetusan Minda 8, didapati bahawa;

- (a) $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle OBA = \angle OCA$ dan $\angle OAB = \angle OAC$
 (b) Panjang $OB = OC$ dan panjang $AB = AC$

Secara generalisasi,



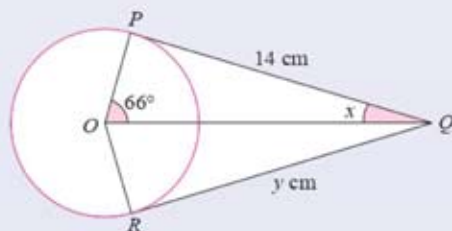
Jika dua tangen kepada suatu bulatan berpusat di O dengan titik ketangenan B dan C , masing-masing bertemu pada titik A , maka,

- $BA = CA$
- $\angle BOA = \angle COA$
- $\angle OAB = \angle OAC$

Contoh 16

Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Tangen PQ dan RQ bertemu di titik Q . Hitung

- (a) nilai x
 (b) nilai y
 (c) panjang jejari bulatan



Penyelesaian:

- (a) Segi tiga $\triangle OPQ$ bersudut tegak dan $\triangle OPQ = 90^\circ$.

$$\text{Maka, } x + 66^\circ = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ - 66^\circ$$

$$x = 24^\circ$$

- (b) Panjang $PQ = RQ = y$

$$\text{Maka, } y = 14 \text{ cm}$$

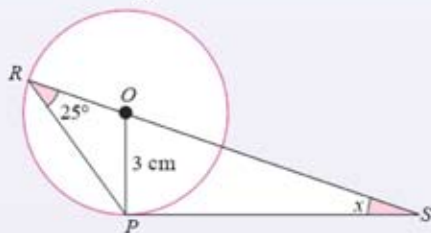
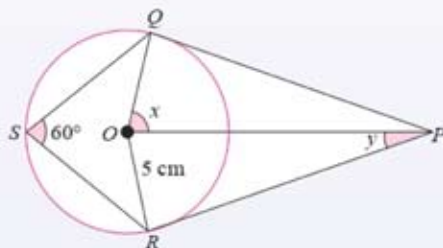
$$(c) \tan 24^\circ = \frac{OP}{14}$$

$$OP = 14 \times \tan 24^\circ$$

$$\text{Jejari, } OP = 6.233 \text{ cm}$$

UJI MINDA 6.3c

- Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berjejari 5 cm dan berpusat di O . Diberi bahawa PQ dan PR ialah tangen kepada bulatan dan $\angle QSR = 60^\circ$. Hitung
 (a) nilai x (b) nilai y
 (c) panjang PQ (d) panjang OP
- Dalam rajah di sebelah, O ialah pusat bulatan dengan jejari 3 cm dan ROS ialah garis lurus. Diberi bahawa $\angle ORP = 25^\circ$ dan PS ialah tangen kepada bulatan. Hitung
 (a) nilai x (b) panjang PS
 (c) panjang RS



Apakah hubungan sudut di antara tangen dan perentas dengan sudut dalam tembereng selang-seli yang dicangkum oleh perentas tersebut?

Dalam Rajah 1(a), PQR ialah tangen kepada bulatan. $\angle x$ ialah sudut di antara perentas QS dengan tangen PQR pada tembereng minor.

$\angle y$ ialah sudut pada tembereng major atau tembereng selang-seli yang dicangkum oleh perentas QS .

Dalam Rajah 1(b), O ialah pusat bulatan. OQ dan OS ialah jejari bulatan serta PQR ialah tangen kepada bulatan. Maka,

$$(a) \ x + g = 90^\circ$$

$$g = 90^\circ - x$$

$$e = g$$

Gantikan

$$(b) \ f = 180^\circ - 2g$$

$$f = 180^\circ - 2(90^\circ - x)$$

$$f = 180^\circ - 180^\circ + 2x$$

$$f = 2x$$

1

$$(c) \ y = \frac{f}{2}$$

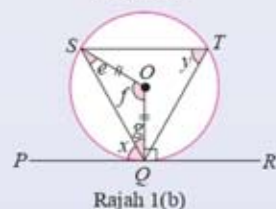
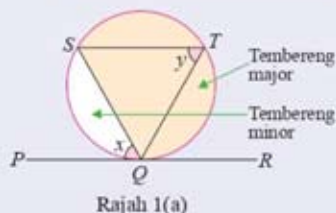
Gantikan 1 dalam 2

$$y = \frac{2x}{2}$$

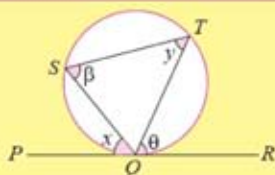
$$y = x$$

STANDARD PEMBELAJARAN

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan sudut di antara tangen dan perentas dengan sudut dalam tembereng selang-seli yang dicangkum oleh perentas itu.



Berdasarkan pernyataan bagi Rajah 1(a) dan Rajah 1(b), kita boleh merumuskan bahawa:



$\angle x = \angle y$ dan $\angle \theta = \angle \beta$ kerana sudut di antara perentas dengan tangen bernilai sama dengan sudut pada tembereng selang-seli yang dicangkum oleh perentas tersebut.

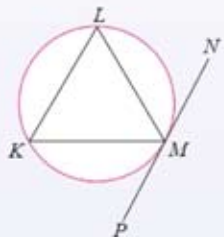
Contoh 17

Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga KLM dan PMN ialah tangen kepada bulatan. Tentukan sudut dalam tembereng selang-seli untuk

- (a) $\angle PMK$ (b) $\angle NML$

Penyelesaian:

- (a) $\angle KLM$ (b) $\angle LKM$



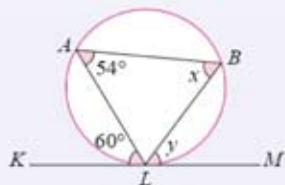
Contoh 18

Rajah di sebelah menunjukkan segi tiga $\triangle ABL$ dalam bulatan. Diberi bahawa KLM ialah tangen kepada bulatan. Tentukan nilai

- (a) x (b) y

Penyelesaian:

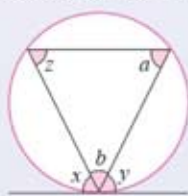
- (a) $x = 60^\circ$ kerana x ialah sudut dalam tembereng selang-seli bagi $\angle KLA$ yang dicangkum oleh perentas AL .
 (b) $y = 54^\circ$ kerana $\angle LAB$ ialah sudut dalam tembereng selang-seli bagi y yang dicangkum oleh perentas BL .



UJI MINDA 6.3d

1. Nyatakan pasangan sudut yang sama nilai di dalam bulatan-bulatan berikut.

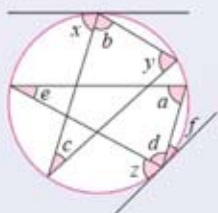
(a)



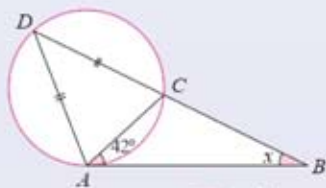
(b)



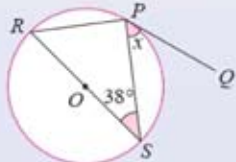
(c)



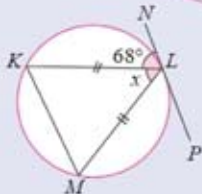
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan dengan AB ialah tangen kepada bulatan tersebut. Diberi $\angle BAC = 42^\circ$. Hitung nilai x .



3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . PQ ialah tangen kepada bulatan. Diberi $\angle PSR = 38^\circ$. Hitung nilai x .



4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan dengan PLN ialah tangen kepada bulatan. $\triangle KLM$ ialah segi tiga sama kaki. Diberi $\angle KLN = 68^\circ$. Hitung nilai x .



Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan tangen kepada bulatan?

Apakah yang anda tahu tentang tangen sepunya?

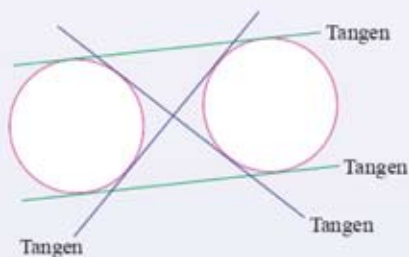
STANDARD PEMBELAJARAN

Menyelesaikan masalah yang melibatkan tangen kepada bulatan.

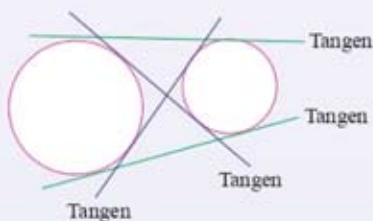
Tangen sepunya kepada dua bulatan ialah satu garis lurus yang merupakan tangen kepada kedua-dua bulatan tersebut.

Perhatikan pasangan bulatan berikut dan tangen sepunya.

1.

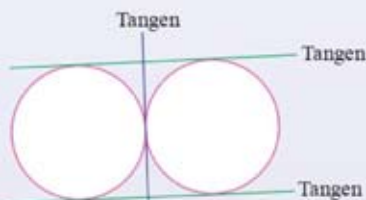


Rajah 1(a)

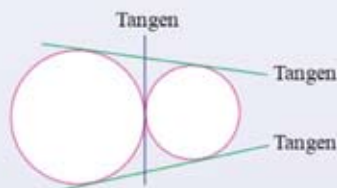


Rajah 1(b)

2.

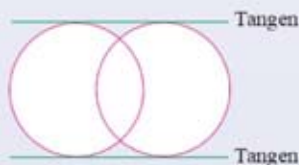


Rajah 2(a)

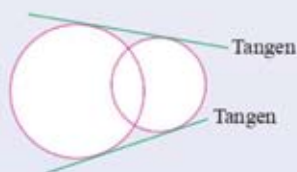


Rajah 2(b)

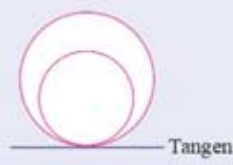
3.



Rajah 3(a)



Rajah 3(b)



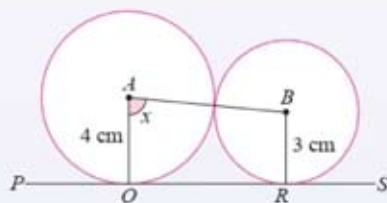
Rajah 3(c)

Daripada rajah-rajah di atas didapati bahawa jika dua bulatan yang sama saiz atau berlainan saiz

- tidak bersentuhan seperti pada Rajah 1(a) dan Rajah 1(b) akan menghasilkan empat tangen sepunya.
- bersentuhan di luar seperti pada Rajah 2(a) dan Rajah 2(b) akan menghasilkan tiga tangen sepunya.
- bersilang seperti pada Rajah 3(a) dan Rajah 3(b) akan menghasilkan dua tangen sepunya.
- bertindih di dalam seperti pada Rajah 3(c) akan menghasilkan hanya satu tangen sepunya.

Contoh 19

Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan yang berpusat di A dan di B dengan jejari 4 cm dan 3 cm masing-masing. Diberi $PQRS$ ialah tangen sepunya kepada kedua-dua bulatan tersebut. Hitung nilai x .

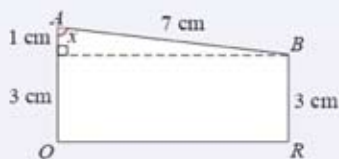


Penyelesaian:

$$\cos x = \frac{1}{7}$$

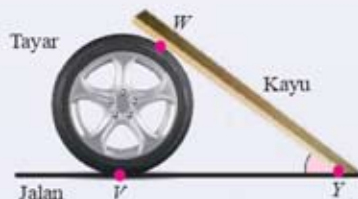
$$x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$x = 81.79^\circ$$



Contoh 20

Sebatang kayu disandarkan kepada sebuah tayar seperti dalam rajah di sebelah. Diberi V ialah titik sentuhan di antara tayar dengan jalan. W ialah titik sentuhan di antara kayu dengan tayar sementara Y ialah titik sentuhan di antara kayu dengan jalan raya. Diameter tayar ialah 50 cm dan jarak WY ialah 1.2 meter. Dengan menganggap bahawa jalan raya itu ialah suatu garis lurus, hitung



- jarak VY
- jarak di antara pusat tayar dengan titik Y dalam meter. Nyatakan jawapan anda betul kepada dua tempat perpuluhan.

Memahami masalah

- VY dan WY ialah tangen kepada bulatan. Diameter tayar 50 cm dan jarak WY ialah 1.2 meter.
- Jarak di antara pusat tayar dengan titik Y .

Merancang strategi

Lakar rajah dan labelkannya dengan nilai-nilai yang diberi.

$$\text{Diameter} = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ meter}$$

$$\text{Jejari} = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ meter}$$

$$WY = 1.2 \text{ meter}$$

Membuat kesimpulan

- $\triangle OWY$ dan $\triangle OYV$ ialah kongruen. Maka, $VY = WY = 1$ meter.
- Jarak di antara pusat tayar dengan titik Y , $OY = 1.23$ m.

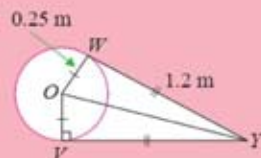
Melaksanakan strategi

$$(a) VY = WY = 1.2 \text{ m.}$$

$$(b) OY = \sqrt{1.2^2 + 0.25^2}$$

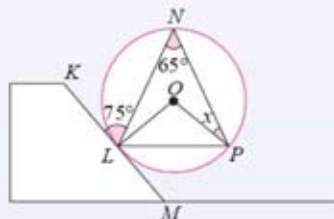
$$OY = \sqrt{1.5025}$$

$$OY = 1.23 \text{ m (2 t.p.)}$$

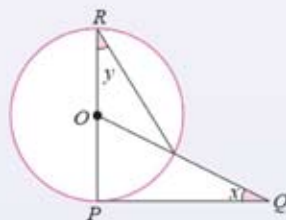


UJI MINDA 6.3e

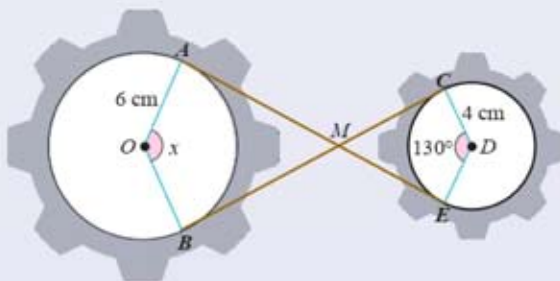
1. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas dari pandangan atas sebuah tong berpusat di O . Dinding lurus KLM menyentuh tong bulat itu di titik L . Diberi bahawa $\angle KLN = 75^\circ$ dan $\angle LNP = 65^\circ$. Hitung nilai x .



2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . PQ ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $PQ = 2OP$. Tentukan nilai $\angle x$ dan $\angle y$. Nyatakan jawapan dalam minit dan darjah.

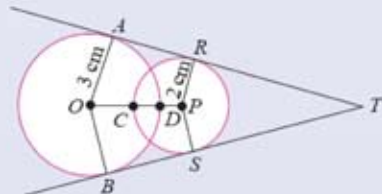


3. Rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada sistem gear pada suatu mesin. Rantai lurus AE dan BC bertemu pada kedua-dua gear pada titik-titik A , B , C , dan E . Gear-gear itu berbentuk bulat dengan pusat-pusat O dan D , masing-masing. Diberi bahawa $OA = 6$ cm, $DC = 4$ cm dan $\angle CDE = 130^\circ$. Hitung



- (a) nilai x
 (b) panjang dalam cm, betul kepada 4 angka bererti
 (i) AM (ii) CM (iii) OD

4. Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan dengan jejari 3 cm dan 2 cm dan berpusat di O dan P masing-masing. Diberi panjang $CD = DP$. Hitung panjang, dalam cm, betul kepada dua tempat perpuluhan.



- (a) OP (b) BS (c) BST

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan sudut dan tangen bagi bulatan?

Kita sentiasa melihat bentuk bulatan dalam pelbagai kegunaan harian. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah basikal. Bolehkah anda menghitung panjang y , $\angle \alpha$ dan $\angle \theta$?

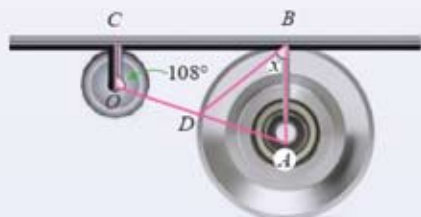


STANDARD PEMBELAJARAN

Menyelesaikan masalah yang melibatkan sudut dan tangen bagi bulatan.

Contoh 21

Rajah di sebelah menunjukkan dua takal berpusat O dan A , masing-masing, digantung dari siling rata BC . Tali ADO menghubungkan kedua-dua takal itu. Hitung nilai x .



Penyelesaian:

Memahami masalah

BC ialah tangen pada bulatan-bulatan pada titik C dan B .

$$\angle OCB = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle AOC = 108^\circ$$

Mengenal pasti $\angle ABD$, x

Merancang strategi

$$\angle OCB + \angle ABC + \angle AOC + \angle OAB = 360^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ADB = x$$

Membuat kesimpulan

Nilai $x = 54^\circ$

Melaksanakan strategi

$$\angle OAB + 90^\circ + 90^\circ + 108^\circ = 360^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle OAB &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 108^\circ \\ &= 72^\circ\end{aligned}$$

AB dan AD ialah jejari. Maka,

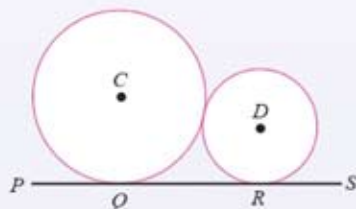
$$\angle ABD = \angle ADB = x$$

$$x = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2}$$

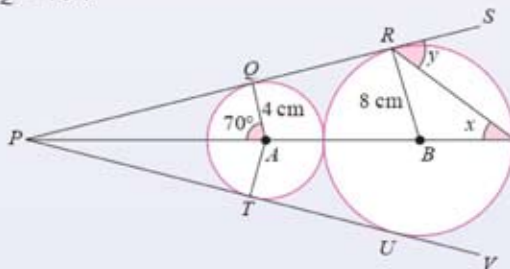
$$x = 54^\circ$$

UJI MINDA 6.4a

1. Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan dengan pusat C dan D . Diberi jejari kedua-dua bulatan tersebut ialah 6 cm dan 3 cm masing-masing. $PQRS$ ialah tangen sepunya kepada kedua-dua bulatan. Hitung



- (a) panjang QR , dalam cm. Nyatakan jawapan betul kepada 3 angka bererti.
 (b) luas sisi 4 $CDRQ$ dalam cm^2 . Nyatakan jawapan betul kepada 4 angka bererti.
2. Rajah di bawah menunjukkan dua bulatan berpusat di A dan B dengan jejari 4 cm dan 8 cm masing-masing. Diberi bahawa $PQRS$ dan $PTUV$ ialah tangen sepunya kepada kedua-dua bulatan tersebut dan $\angle PAQ = 70^\circ$.



Hitung

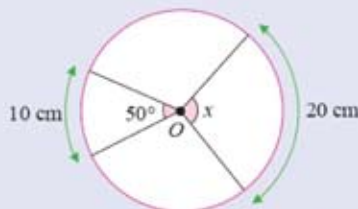
- (a) nilai x
 (b) nilai y
 (c) panjang QR , dalam cm betul kepada 4 angka bererti.

Cabaran Dinamis

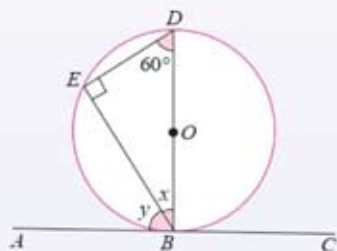


Uji Diri

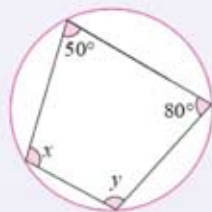
1. Rajah di sebelah menunjukkan suatu bulatan. Hitung nilai x dan y .
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Hitung nilai x .



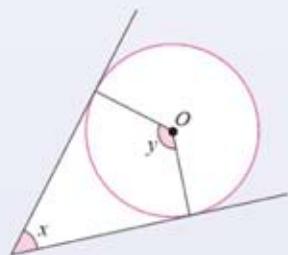
3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . ABC ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $\angle BDE = 60^\circ$. Hitung nilai
- x
 - y



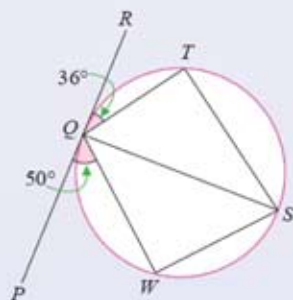
4. Rajah di sebelah menunjukkan sisi empat kitaran. Hitung nilai $x + y$.



5. Bulatan berpusat di O di sebelah mempunyai dua tangen kepada bulatan seperti yang ditunjukkan. Apakah hubungan antara sudut x dan sudut y ?

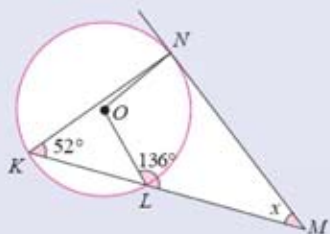


6. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan. Diberi bahawa PQR ialah tangen kepada bulatan. $\angle RQT = 36^\circ$ dan $\angle PQW = 50^\circ$. Hitung nilai sudut TSW .

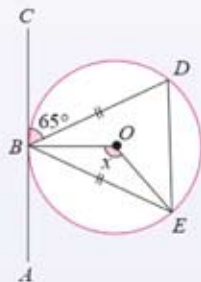


Mahir Diri

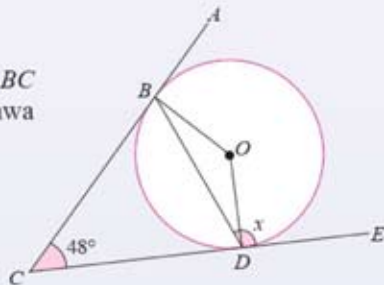
1. Dalam rajah di sebelah, O ialah pusat bulatan dan MN ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $\angle LKN = 52^\circ$ dan $\angle MLO = 136^\circ$. Hitung nilai x .



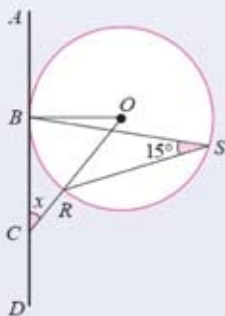
2. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . ABC ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $BD = BE$ dan $\angle CBD = 65^\circ$. Hitung nilai x .



3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . ABC dan CDE ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $\angle BCD = 48^\circ$. Hitung nilai x .



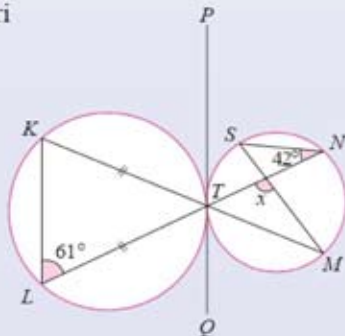
4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . AD ialah tangen kepada bulatan. Diberi bahawa $\angle BSR = 15^\circ$. Hitung nilai x .



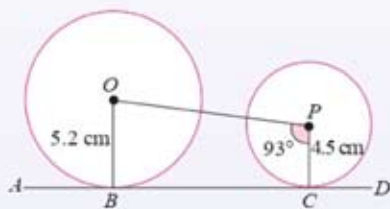
Masteri Kendiri

1. Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan. PTQ ialah tangen sepunya kepada kedua-dua bulatan tersebut. Diberi panjang $KT = LT$, $\angle KLT = 61^\circ$ dan $\angle SNT = 42^\circ$. Hitung

- (a) $\angle LTQ$
(b) nilai x

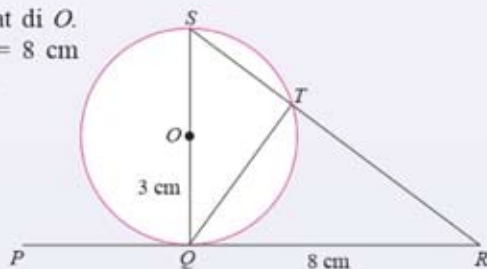


2. Rajah di sebelah menunjukkan dua bulatan berpusat di O dan di P masing-masing. $ABCD$ ialah tangen sepunya kepada kedua-dua bulatan. Hitung luas trapezium $OBCP$, dalam cm^2 , betul kepada 3 angka bererti.



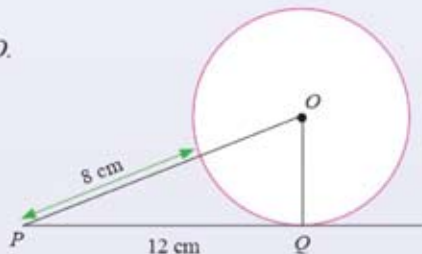
3. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . Diberi bahawa jejari bulatan ialah 3 cm, $QR = 8$ cm dan PQR ialah tangen kepada bulatan. Tentukan

- (a) $\angle TRQ$
(b) panjang ST , dalam cm.

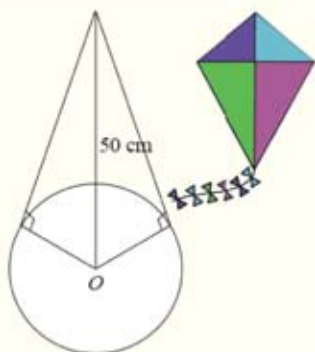


4. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan berpusat di O . PQ ialah tangen kepada bulatan. Hitung nilai

- (a) jejari bulatan, dalam cm
(b) panjang OP , dalam cm
(c) luas $\triangle OPQ$, dalam cm^2



PROJEK



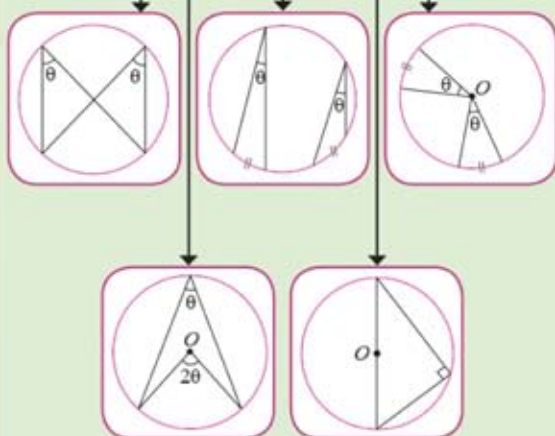
Layang-layang merupakan suatu permainan tradisional di negara kita. Layang-layang dapat dibina dengan menggunakan konsep tangen kepada bulatan. Dengan ilmu kongruen dan ketangenan yang telah dipelajari, hasilkan satu layang-layang yang mempunyai panjang 50 cm. Dapatkan panduan daripada rajah yang telah disediakan di sebelah.



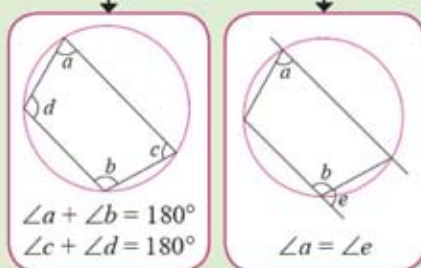
PETA KONSEP

Bulatan

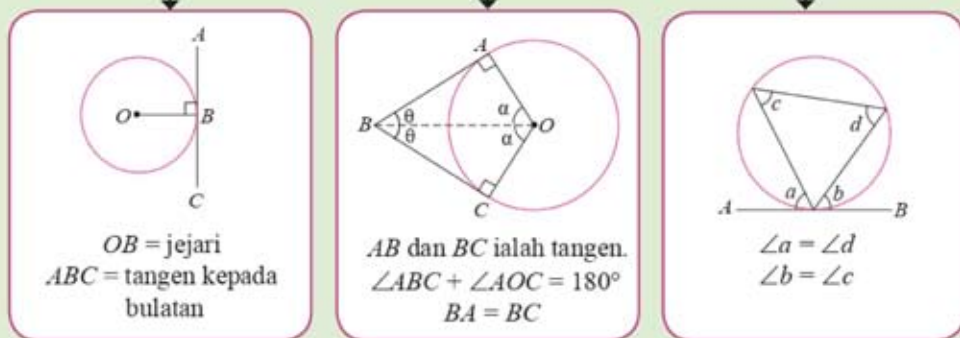
Ciri-ciri sudut dalam bulatan



Sisi empat kitaran



Tangen kepada bulatan



Pada akhir bab ini, saya dapat:



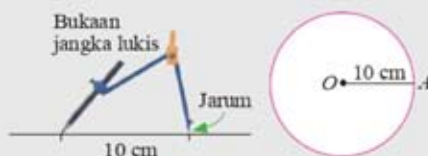
1.	Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan antara sudut-sudut pada lilitan dengan sudut pusat yang dicangkum oleh lengkok tertentu, dan seterusnya menggunakan hubungan tersebut untuk menentukan nilai sudut dalam bulatan.		
2.	Menyelesaikan masalah yang melibatkan sudut dalam bulatan.		
3.	Mengenal dan memerihalkan sisi empat kitaran.		
4.	Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan antara sudut-sudut pada sisi empat kitaran, dan seterusnya menggunakan hubungan tersebut untuk menentukan nilai sudut pada sisi empat kitaran.		
5.	Menyelesaikan masalah yang melibatkan sisi empat kitaran.		
6.	Mengenal dan memerihalkan tangen kepada bulatan.		
7.	Membuat dan menentusahkan konjektur tentang sudut di antara tangen dengan jejari bulatan pada titik ketangenan.		
8.	Membuat dan menentusahkan konjektur tentang sifat-sifat berkaitan dengan dua tangen kepada suatu bulatan.		
9.	Membuat dan menentusahkan konjektur tentang hubungan sudut di antara tangen dengan perentas dengan sudut dalam tembereng selang seli yang dicangkum oleh perentas itu.		
10.	Menyelesaikan masalah yang melibatkan tangen kepada bulatan.		
11.	Menyelesaikan masalah yang melibatkan sudut dan tangen bagi bulatan.		

JELAJAH MATEMATIK

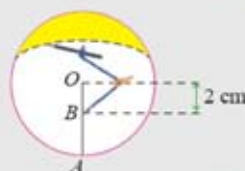
Bulan akan mengalami perubahan mengikut fasa. Murid boleh melukis bentuk bulan yang berlainan fasa untuk digunakan sebagai hiasan.

Bahan: Kertas lukisan, jangka lukis, pensel, pembaris dan gunting

1. Lukiskan suatu bulatan dengan jejari 10 cm.



2. Kemudian, kekalkan bukaan jangka lukis pada 10 cm dan tempatkan jarumnya 2 cm daripada titik O iaitu titik B. Lukiskan bulatan seperti rajah di sebelah.



3. Bahagian yang berlorek boleh digunting dan digunakan sebagai bulan sabit. Bahagian yang tidak berlorek boleh digunakan bulan separa penuh seperti rajah di sebelah.



4. Langkah (a) dan (b) boleh diulangi dengan mengubah jarak OB. Jarak OB boleh dipanjangkan kepada 2 cm untuk mendapatkan dua bentuk bulan yang berlainan. Seterusnya jarak itu boleh dipanjangkan untuk bentuk yang berlainan. Contohnya adalah seperti berikut:

Jarak OB	Bentuk yang terhasil
1 cm	 + 
2 cm	 + 

Bentuk-bentuk ini boleh digunakan sebagai alat untuk mengajar perubahan bentuk bulan atau hiasan seperti di bawah.

Hari	4	8	12	15	19	23	27
Fasa bulan							
	Bulan sabit	Bulan separa	Purnama baru	Purnama	Purnama lama	Bulan separa	Bulan sabit