

BAB 7

PENGATURCARAAN LINEAR

MENU	
Burger Ayam Istimewa	RM1.00
Burger Daging Istimewa	RM1.00
Nugget	RM1.50 / 5 biji
Pai Epal	RM4.70
Pai Nanas	RM4.70



MENU	
Jus Oren	RM2.50
Jus Epal	RM2.50
Piza	RM6.90
Sandwic	RM3.00
Salad	RM4.00



Apakah yang akan dipelajari?

- Model Pengaturcaraan Linear
- Aplikasi Pengaturcaraan Linear

Senarai
Standard
Pembelajaran



bit.ly/2sZgH6L

Sudut • Maklumat

George Bernard Dantzig (1914 - 2005) ialah seorang saintis matematik Amerika yang dikenali kerana sumbangan beliau dalam bidang kejuruteraan industri, penyelidikan operasi, sains komputer, ekonomi dan statistik.

Beliau dikenali kerana menggunakan perkembangan algoritma untuk menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear.

Untuk maklumat lanjut:



bit.ly/3jcSRZG

Perniagaan dengan menggunakan trak makanan semakin popular di Malaysia. Adnan bercadang untuk memulakan perniagaan menggunakan trak makanan. Berdasarkan hasil kajiannya, Adnan mendapati bahawa perniagaan trak makanan sangat sesuai dijalankan di kawasan perumahan dan lokasi bandar yang rata-rata penduduknya bekerja hingga lewat malam. Beliau telah membuat pelan perniagaan dengan mengambil kira modal yang ada, jumlah trak makanan yang diperlukan dan masa beroperasi. Beliau juga ingin menyediakan perkhidmatan tempahan makanan secara dalam talian. Beliau telah membuat kajian berkaitan kecerdasan buatan dalam memajukan perniagaan. Bolehkah beliau memastikan perniagaannya mendapat keuntungan yang maksimum dengan modal yang minimum? Adakah perniagaannya akan memperoleh keuntungan yang berlipat ganda dengan menggunakan kecerdasan buatan, AI? Pengetahuan yang luas dalam bab ini akan membantu seseorang usahawan memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan kos pengeluaran.

Video mengenai kecerdasan buatan (AI).



bit.ly/2YQ1Kjo

Kepentingan Bab Ini

- Pengaturcaraan linear digunakan secara meluas dalam bidang sains ekologi, pengangkutan dan organisasi perniagaan untuk meminimumkan kos dan memaksimumkan keuntungan.
- Pakar-pakar perisian komputer menggunakan pengaturcaraan linear untuk menyelesaikan ribuan pemboleh ubah dan kekangan berkaitan masalah rutin harian.
- Pengurus-pengurus firma menggunakan pengaturcaraan linear dalam merancang dan membuat keputusan berdasarkan sumber-sumber yang ada.

Kata Kunci

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| ● Model matematik | <i>Mathematical model</i> |
| ● Kekangan | <i>Constraint</i> |
| ● Fungsi objektif | <i>Objective function</i> |
| ● Rantau tersaur | <i>Feasible region</i> |
| ● Pengoptimuman | <i>Optimization</i> |

Secara umumnya, masalah pengaturcaraan linear berkaitan dengan pengagihan sumber-sumber yang terhad seperti wang, tenaga manusia, bahan mentah dan sebagainya dengan cara yang terbaik supaya kos dapat diminimumkan atau keuntungan dapat dimaksimumkan.

Suatu model pengaturcaraan linear boleh dibentuk mengikut langkah-langkah yang berikut:

1. Kenal pasti pemboleh ubah keputusan

Pemboleh ubah keputusan menerangkan keputusan yang perlu dibuat dan kebiasaannya diwakili dengan huruf x dan y .

2. Kenal pasti fungsi objektif

Fungsi objektif ialah fungsi yang hendak dimaksimumkan atau diminimumkan.

3. Kenal pasti kekangan

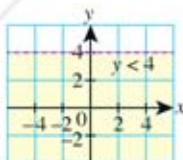
Wakikan kekangan yang wujud dalam bentuk persamaan atau ketaksamaan linear, iaitu $=$, $<$, $\leq$, $>$ dan/atau $\geq$. Kekangan mestilah dalam sebutan semua pemboleh ubah keputusan.

Apakah kaedah yang paling sesuai digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah secara pengaturcaraan linear jika masalah tersebut hanya melibatkan dua pemboleh ubah keputusan sahaja?

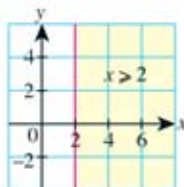


Membentuk model matematik bagi suatu situasi berdasarkan kekangan yang diberi dan mewakili model tersebut secara grafik

Anda telah mempelajari ketaksamaan linear dalam satu dan dua pemboleh ubah. Bagaimanakah untuk mewakili ketaksamaan $y < 4$ atau $x \geq 2$ secara grafik? Rajah 7.1 dan Rajah 7.2 masing-masing menunjukkan graf bagi ketaksamaan $y < 4$ dan $x \geq 2$.



Rajah 7.1



Rajah 7.2

Suatu model matematik yang terdiri daripada kekangan atau fungsi objektif boleh ditentukan daripada situasi atau masalah yang diberi. Adakah model matematik tersebut boleh diwakikan secara grafik terutamanya dalam bentuk graf? Mari teroka bersama-sama.

Akses QR

Terdapat empat kaedah penyelesaian pengaturcaraan linear, iaitu kaedah graf, kaedah simpleks, kaedah M dan kaedah dua fasa. Kaedah yang biasa digunakan ialah kaedah graf. Imbas kod QR untuk maklumat bagi kaedah lain.



bit.ly/2BAMzUF

Aktiviti Penerokaan 1

Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membentuk model matematik bagi suatu situasi berdasarkan kekangan yang diberi dan mewakili model tersebut secara grafik

Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Secara berkumpulan, pilih satu situasi yang terdapat dalam lampiran yang disediakan. Kemudian, bincangkan situasi tersebut dan tentukan kekangan yang wujud. Apakah itu model matematik?
3. Seterusnya, bina satu model matematik yang berbentuk ketaksamaan linear dalam dua pemboleh ubah dengan mengambil kira semua kekangan yang wujud.
4. Dengan menggunakan perisian GeoGebra, lukis graf bagi ketaksamaan linear itu.
5. Buat satu kesimpulan mengenai kedudukan rantau berlorek dan jenis garisan bagi graf itu.


bit.ly/2PQldfK

Daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa suatu model matematik boleh dibentuk dengan menggunakan pemboleh ubah x dan y dengan kekangan bagi suatu situasi ialah $\leq$, $\geq$, $<$ atau $>$.

Rantau di bahagian atas garis lurus $ax + by = c$ memuakan ketaksamaan $ax + by \geq c$ dan $ax + by > c$ manakala rantau di bahagian bawah garis lurus $ax + by = c$ memuakan ketaksamaan $ax + by \leq c$ dan $ax + by < c$, dengan keadaan $b > 0$.

Rantau yang terletak di sebelah kanan garis $ax = c$ memuakan ketaksamaan $ax \geq c$ dan $ax > c$ manakala rantau yang terletak di sebelah kiri memuakan ketaksamaan $ax \leq c$ dan $ax < c$. Secara amnya, jika suatu model matematik melibatkan tanda:

- $\geq$ atau $\leq$, maka garis padu (—) akan digunakan.
- $<$ atau $>$, maka garis sempang (----) akan digunakan.



PERBINCANGAN

Rantau yang memuakan ketaksamaan $10x - 15y \leq 100$ berada di bawah garis lurus $10x - 15y = 100$. Adakah pernyataan tersebut benar? Bincangkan.

Contoh 1

Tuliskan satu model matematik bagi setiap situasi yang berikut.

- (a) Perimeter sebuah bingkai gambar yang berbentuk segi empat tepat mestilah tidak lebih daripada 180 cm.
- (b) Seorang penjaja menjual sayur bayam dan sawi. Harga jualan bagi 1 kg bayam dan 1 kg sawi masing-masing ialah RM3.50 dan RM4.50. Jumlah jualan yang diperolehi penjaja itu adalah sekurang-kurangnya RM350 sehari.

Penyelesaian

- (a) Katakan x dan y masing-masing ialah lebar dan panjang sebuah bingkai gambar berbentuk segi empat tepat. Maka, $2x + 2y < 180$.
- (b) Katakan x dan y masing-masing ialah bilangan kilogram bayam dan sawi yang dijual sehari. Maka, $3.50x + 4.50y \geq 350$.



Contoh 2

Wakilkan setiap ketaksamaan linear berikut secara grafik.

(a) $x - 2y \geq -4$

(b) $5y - 5x < 25$

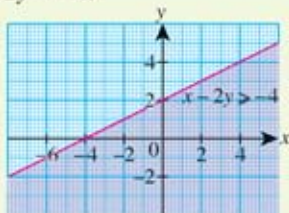
Penyelesaian

(a) Diberi $x - 2y \geq -4$

Didapati bahawa $b = -2 (< 0)$.

Maka, rantau berada di bawah garis lurus

$x - 2y = -4$.



(b) Diberi $5y - 5x < 25$

Didapati bahawa $b = 5 (> 0)$.

Maka, rantau berada di bawah garis lurus

$5y - 5x = 25$.



Contoh 3

Encik Andy bercadang untuk membina dua jenis rumah, iaitu A dan B di atas sebidang tanah yang berkeluasan 10 000 m². Setelah melakukan tinjauan, beliau mendapati bahawa rumah jenis A memerlukan tanah seluas 100 m² dan rumah jenis B memerlukan tanah seluas 75 m². Encik Andy mempunyai peruntukan tanah yang terhad, maka rumah yang boleh dibina adalah sekurang-kurangnya 200 buah.

(a) Kenal pasti kekangan yang wujud dalam masalah itu.

(b) Tuliskan model matematik yang berkaitan.

(c) Lukis gambaran grafik bagi setiap model matematik yang diperolehi di (b).

Penyelesaian

Katakan x dan y mewakili rumah jenis A dan B.

(a) Luas tanah yang dimiliki oleh Encik Andy ialah 10 000 m².

Rumah yang boleh dibina sekurang-kurangnya 200 buah.

(b) Kekangan I: $100x + 75y \leq 10\,000$

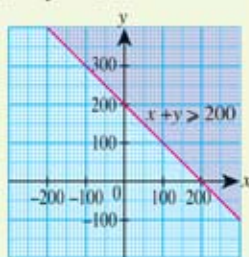
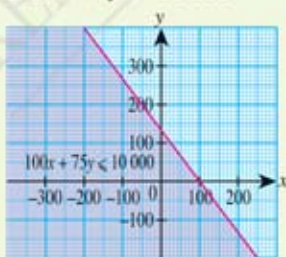
Kekangan II: $x + y \geq 200$

(c) Kekangan I:

$100x + 75y \leq 10\,000$

Kekangan II:

$x + y \geq 200$



Kaedah Alternatif

Daripada graf kekangan I:

- Pilih sebarang titik pada graf, misalnya (100, 200) yang berada di atas garis $100x + 75y = 10\,000$. Gantikan titik dalam ketaksamaan $100x + 75y \leq 10\,000$. $100(100) + 75(200) \leq 10\,000$ $25\,000 \leq 10\,000$ (Palsu) Maka, lorekan graf berada di bawah garis.
- Pilih sebarang titik pada graf, misalnya (-200, 200) yang berada di bawah garis $100x + 75y = 10\,000$. Gantikan titik dalam ketaksamaan $100x + 75y \leq 10\,000$. $100(-200) + 75(200) \leq 10\,000$ $-5\,000 \leq 10\,000$ (Benar) Maka, lorekan graf berada di bawah garis.

Pengoptimuman dalam pengaturcaraan linear

Sebuah kedai kek menghasilkan x biji kek coklat dan y biji kek keju dengan kos bagi sebiji kek masing-masing ialah RM4.00 dan RM5.00. Diberi jumlah kos bagi x biji kek coklat dan y biji kek keju ialah $4x + 5y$. Perhatikan bahawa $4x + 5y$ ialah suatu ungkapan linear. Jika kita ingin menentukan nilai minimum bagi kos $4x + 5y$, maka ungkapan linear ini dikenali sebagai **fungsi objektif**.

Secara amnya,

Fungsi objektif ditulis sebagai $k = ax + by$

Aktiviti Penerokaan 2

Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka cara mengoptimumkan fungsi objektif

Langkah:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Seret gelongsor P ke kiri dan ke kanan. Perhatikan perubahan yang berlaku pada garis d apabila P berubah.
3. Kemudian, tentukan nilai maksimum dalam rantau tersebut.
4. Diberi bahawa fungsi objektif ialah $P = 60x + 90y$. Dalam kumpulan masing-masing, bincangkan cara untuk mencari nilai maksimum bagi P dalam rantau yang memenuhi model matematik dengan kekangan-kekangan yang berikut.
 I: $x + y \leq 320$ II: $x + 2y \leq 600$ III: $5x + 2y \leq 1\,000$
5. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dan lakukan perbincangan bersama dengan kumpulan lain.



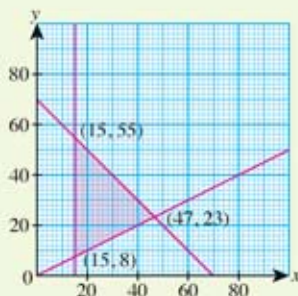
ggbm.ai/rcfzgwrg

Daripada Aktiviti Penerokaan 2, didapati bahawa nilai bagi fungsi objektif dapat ditentukan dengan menggerakkan graf garis fungsi objektif secara selari dalam rantau yang memuaskan semua kekangan yang ada. Nilai optimum diperoleh dengan menggantikan koordinat titik maksimum dalam rantau ke dalam fungsi objektif itu.

Contoh 4

Rajah di sebelah menunjukkan rantau berlorek yang memenuhi beberapa kekangan daripada suatu situasi.

- (a) Menggunakan satu nilai k yang sesuai, lukis garis $k = x + 2y$ pada graf tersebut. Pada graf yang sama, lukis garis lurus yang selari dengan garis $k = x + 2y$ dan melalui setiap titik pada bucu rantau tersebut.
- (b) Seterusnya, cari
 - (i) nilai maksimum bagi $x + 2y$,
 - (ii) nilai minimum bagi $x + 2y$.



Diberi $k = x + 2y$.

(a) Katakan $k = 4$, maka $x + 2y = 4$.



(b) (i) Gantikan titik maksimum bagi rantau berlorek, iaitu $(15, 55)$ ke dalam $k = x + 2y$.

$$k = 15 + 2(55) = 125$$

Maka, nilai maksimum bagi k ialah 125.

(ii) Gantikan titik minimum bagi rantau berlorek, iaitu $(15, 8)$ ke dalam $k = x + 2y$.

$$k = 15 + 2(8) = 31$$

Maka, nilai minimum bagi k ialah 31.



Langkah-langkah untuk menentukan nilai k yang bersesuaian bagi $k = ax + by$:

1. Perhatikan nilai a dan b dengan masing-masing ialah pekali bagi x dan y .
2. Cari gandaan sepunya bagi a dan b .
3. Ambil k sebagai gandaan sepunya tersebut.

Latihan Kendiri 7.1

1. Bina gambaran secara grafik bagi setiap ketaksamaan linear yang berikut.

(a) $2y - 3x \geq 12$

(b) $6x - y \geq 12$

(c) $y + 7x - 49 \leq 0$

2. Tuliskan model matematik berdasarkan situasi yang berikut.

Sebuah syarikat pengeluar kereta menghasilkan dua jenis kereta, iaitu kereta M dan kereta N . Pada hari tertentu, syarikat tersebut menghasilkan x unit kereta M dan y unit kereta N .

(a) Bilangan unit kereta N yang dihasilkan adalah tidak lebih daripada tiga kali bilangan unit kereta M .

(b) Jumlah kereta yang dihasilkan adalah selebih-lebihnya 80 unit.

(c) Bilangan unit kereta N yang dihasilkan adalah sekurang-kurangnya 10 unit.

3. Teliti situasi di bawah. Kemudian, jawab setiap soalan yang berikut.

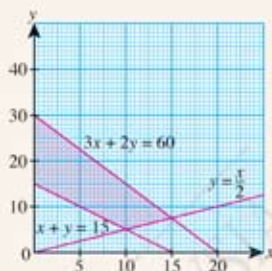
Xin Tian ingin menanam pokok pisang dan pokok betik di atas sebidang tanah seluas 80 hektar. Beliau mempunyai 360 orang pekerja dengan modal sekurang-kurangnya RM24 000. Beliau menggunakan x hektar tanah untuk menanam pokok pisang dan y hektar tanah untuk menanam pokok betik. Setiap hektar ladang pokok pisang akan diselia oleh 3 orang pekerja manakala 6 orang pekerja pula akan menyelia setiap hektar ladang pokok betik. Kos perbelanjaan untuk sehektar ladang pokok pisang ialah RM800 dan sehektar ladang pokok betik ialah RM300.

(a) Kenal pasti kekangan yang terdapat dalam masalah di atas.

(b) Tuliskan model matematik yang berkaitan dengan masalah di atas.

(c) Wakilkan setiap model matematik yang diperoleh di (b) secara grafik.

4. Rajah di sebelah menunjukkan rantau berlorek yang memenuhi beberapa kekangan daripada suatu situasi.
- Menggunakan satu nilai k yang bersesuaian, lukis garis $k = x + 2y$ pada graf tersebut.
 - Pada graf yang sama, lukis garis lurus yang selari dengan garis $k = x + 2y$ yang diperoleh di (a) dan melalui setiap titik pada bucu rantau tersebut.
 - Seterusnya, cari
 - nilai maksimum bagi $x + 2y$,
 - nilai minimum bagi $x + 2y$.



Latihan Formatif 7.1

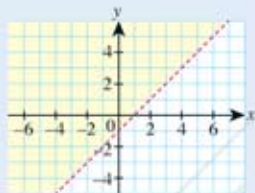
Kuiz

bit.ly/2tN6xT

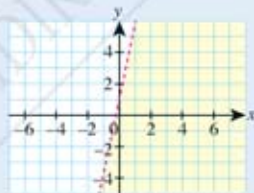


1. Tuliskan ketaksamaan linear bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

(a)



(b)



2. Sebuah kolej menawarkan dua kursus pengajian, iaitu kursus P dan kursus Q . Pengambilan pelajar di kolej itu berdasarkan kekangan yang berikut.
- Jumlah pelajar adalah tidak melebihi 100 orang.
 - Bilangan pelajar kursus Q adalah tidak lebih daripada empat kali bilangan pelajar kursus P .
 - Bilangan pelajar kursus Q melebihi bilangan pelajar kursus P sekurang-kurangnya lima orang.
- Tuliskan model matematik berdasarkan situasi di atas jika x mewakili bilangan pelajar yang mengambil kursus P dan y mewakili bilangan pelajar yang mengambil kursus Q .
3. Puan Laili memperoleh gaji bulanan sebanyak RM3 000. Beliau membelanjakan RM x untuk pengangkutan dan RM y untuk makanan. Perbelanjaan bulanan untuk makanan adalah selebih-lebihnya tiga kali perbelanjaan bulanan untuk pengangkutan. Perbelanjaan bulanan untuk makanan juga adalah sekurang-kurangnya RM50 lebih daripada perbelanjaan bulanan untuk pengangkutan. Perbelanjaan bulanan untuk pengangkutan dan makanan tidak melebihi satu pertiga daripada gaji bulanannya. Tuliskan model matematik berdasarkan situasi ini.

8.8

7

Dalam bidang perniagaan, ahli perniagaan perlu membuat keputusan berkaitan dengan meminimumkan kos dan memaksimumkan keuntungan. Keputusan yang dilakukan itu bergantung pada kekangan sedia ada. Bagaimanakah mereka dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan baik?

Pengetahuan mengenai pengaturcaraan linear penting bagi menyelesaikan masalah tersebut. Melalui pengaturcaraan linear, kita perlu mentafsir sesuatu masalah dalam sebutan pemboleh ubah. Satu sistem ketaksamaan atau persamaan linear yang melibatkan pemboleh ubah berkenaan pula dapat dibentuk berdasarkan syarat atau kekangan yang wujud.



Menyelesaikan masalah yang melibatkan pengaturcaraan linear secara graf

Masalah pengaturcaraan linear dapat diselesaikan dengan membina graf bagi semua persamaan linear yang berkaitan mengikut langkah-langkah yang berikut.

Kenal pasti kekangan yang wujud.

Tentukan fungsi objektif.

Tentukan nilai bagi semua pemboleh ubah keputusan yang memuaskan setiap kekangan.

Jika masalah tersebut mempunyai penyelesaian, semua kekangan akan membentuk satu rantau sepunya yang dinamakan sebagai **rantau tersaur**. Penyelesaian dalam rantau tersebut pula dikenali sebagai **penyelesaian tersaur**.

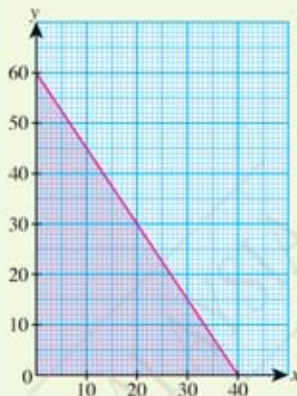
Nilai yang memuaskan kekangan dikenali sebagai **nilai tersaur** manakala nilai yang tidak memuaskan kekangan tersebut dikenali sebagai **nilai tidak tersaur**.

Contoh 5

Seorang peniaga ingin menghasilkan x jambak bunga ros dan y jambak bunga angerik. Masa yang diambil olehnya untuk menghasilkan sejangk bunga ros dan bunga angerik masing-masing ialah 20 minit dan 30 minit. Proses menghasilkan kedua-dua jambak bunga tersebut mestilah berdasarkan kekangan yang berikut.

- I Bilangan jambak bunga angerik mestilah tidak lebih daripada dua kali bilangan jambak bunga ros.
- II Bilangan jambak bunga angerik mestilah sekurang-kurangnya $\frac{1}{4}$ daripada bilangan jambak bunga ros.

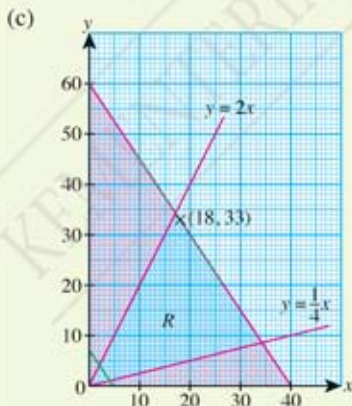
- (a) Tulis model matematik yang melibatkan sistem ketaksamaan linear bagi mewakili kekangan I dan kekangan II.
- (b) Kekangan ketiga diwakili oleh rantau berwarna merah jambu yang mewakili masa penyediaan kedua-dua jambak bunga seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Tuliskan kekangan tersebut dalam perkataan.
- (c) Bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi ketiga-tiga kekangan. Menggunakan graf yang sama, cari
- bilangan minimum jambak bunga anggerik jika bilangan jambak bunga ros ialah 30,
 - jumlah keuntungan maksimum peniaga tersebut jika keuntungan bagi setiap jambak bunga ros dan jambak bunga anggerik masing-masing ialah RM35 dan RM25.



Penyelesaian

- (a) Kekangan I: $y \leq 2x$
 Kekangan II: $y \geq \frac{1}{4}x$
- (b) Pertimbangkan titik (0, 60) dan (40, 0).
 Kecerunan garis lurus, $m = \frac{60 - 0}{0 - 40} = -\frac{3}{4}$
 Persamaan garis lurus, $y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 40)$
 $2y + 3x = 120$
 $20y + 30x = 1\,200$

Maka, jumlah masa menghasilkan kedua-dua jambak bunga tersebut sekurang-kurangnya adalah 2 jam.



- (i) Gantikan $x = 30$ ke dalam $y = \frac{1}{4}x$,

$$y = \frac{1}{4}(30) \\ = 7.5$$

Maka, bilangan minimum bunga anggerik ialah 8 jambak.

- (ii) Titik maksimum bagi rantau berlorek ialah (18, 33).
 Gantikan titik maksimum itu ke dalam $k = 35x + 25y$,
 $k = 35(18) + 25(33)$
 $= 630 + 825$
 $= 1\,455$

Maka, keuntungan maksimum peniaga tersebut ialah RM1 455.



Sudut Informasi

Titik maksimum atau optimum ialah titik di bucu-bucu suatu rantau tersaur yang akan menghasilkan nilai optimum bagi fungsi objektif.

BAB

7

Sebuah sekolah ingin membeli dua jenis meja, iaitu meja P dan meja Q untuk diletakkan di dalam makmal komputer. Harga bagi sebuah meja P dan meja Q masing-masing ialah RM200 dan RM100. Luas permukaan meja P ialah 1 m^2 manakala meja Q ialah 2 m^2 . Sekolah tersebut membeli x buah meja P dan y buah meja Q . Pembelian meja berdasarkan kekangan berikut.

- I Jumlah luas permukaan meja adalah tidak kurang daripada 30 m^2 .
 - II Jumlah wang yang diperuntukkan ialah RM6 000.
 - III Bilangan meja Q selebih-lebihnya adalah dua kali bilangan meja P .
- (a) Selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tuliskan tiga ketaksamaan linear yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - (b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 buah meja pada paksi- x dan paksi- y , bina dan lorekkan rantau R yang memuaskan semua kekangan di atas.
 - (c) Berdasarkan graf yang dibina di (b), cari
 - (i) julat bagi bilangan meja P jika bilangan meja Q yang dibeli ialah 10 buah,
 - (ii) bilangan maksimum murid yang boleh menggunakan meja tersebut pada masa tertentu jika sebuah meja P dapat menampung 4 orang murid dan sebuah meja Q dapat menampung 8 orang murid.



Tip Pintar

Masalah dalam sesuatu situasi boleh diringkaskan dalam bentuk jadual. Berdasarkan Contoh 6, masalah dalam situasi yang diberi boleh diringkaskan seperti berikut:

	Meja P	Meja Q
Harga	RM200	RM100
Luas	1 m^2	2 m^2

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Harga sebuah meja P ialah RM200.
- ◆ Harga sebuah meja Q ialah RM100.
- ◆ Luas permukaan meja P ialah 1 m^2 .
- ◆ Luas permukaan meja Q ialah 2 m^2 .
- ◆ Jumlah peruntukan wang ialah RM6 000.
- ◆ Jumlah luas permukaan meja adalah tidak kurang daripada 30 m^2 .
- ◆ Bilangan meja Q selebih-lebihnya adalah dua kali daripada bilangan meja P .

2. Merancang strategi

- ◆ Katakan x ialah bilangan meja P dan y ialah bilangan meja Q .
- ◆ Jumlah harga meja P ialah $\text{RM}200x$.
- ◆ Jumlah harga meja Q ialah $\text{RM}100y$.



Tip Pintar

Kaedah menyelesaikan masalah persamaan linear.

1. Tafsirkan masalah dan tentukan pemboleh ubah.
2. Tentukan model matematik dalam bentuk sistem ketaksamaan linear.
3. Lukis graf dan tentukan rantau penyelesaian, R .
4. Tulis fungsi objektif bagi kuantiti yang hendak dimaksimumkan atau diminimumkan, iaitu $k = ax + by$.
5. Pilih satu nilai yang sesuai bagi k dan lukis garis lurus itu.

3. Melaksanakan strategi

(a) Kekangan I:

$$x + 2y \geq 30$$

Kekangan II:

$$200x + 100y \leq 6\,000$$

$$2x + y \leq 60$$

Kekangan III:

$$y \leq 2x$$

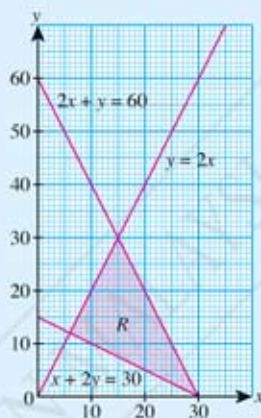
Jadi, tiga ketaksamaan linear yang

memuaskan semua kekangan

tersebut ialah $x + 2y \geq 30$,

$2x + y \leq 60$ dan $y \leq 2x$.

(b)



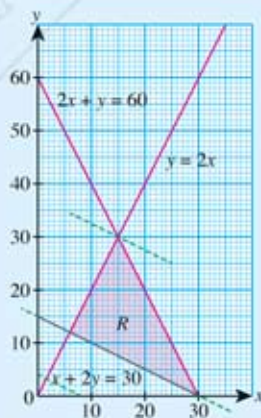
(c) (i) Diberi bilangan meja Q yang dibeli ialah 10 buah. Maka, lukis garis lurus $y = 10$. Daripada graf, titik persilangan bagi garis lurus $y = 10$ dengan rantau minimum dan maksimum terletak pada $x = 10$ dan $x = 25$. Maka, julat bagi bilangan meja P ialah $10 \leq x \leq 25$.

(ii) Katakan bilangan maksimum murid menggunakan meja P dan Q diberi oleh $k = 4x + 8y$.

$$\text{Andaikan } k = 4 \times 8 = 32.$$

Daripada graf, didapati bahawa garis lurus melalui titik optimum (15, 30) dalam rantau berlorek.

$$\begin{aligned} \text{Maka, bilangan maksimum murid ialah} \\ &= 4(15) + 8(30) \\ &= 300 \end{aligned}$$



4. Membuat refleksi

- ◆ Pertimbangkan sebarang titik dalam rantau berlorek, misalnya (20, 20).
- ◆ Gantikan titik (20, 20) ini ke dalam fungsi k .

$$\begin{aligned} k &= 4(20) + 8(20) \\ &= 240 (< 300) \end{aligned}$$

BAB

7



- Sebuah institusi menawarkan dua kursus perniagaan, iaitu Kursus Pengurusan dan Kursus Kewangan. Bilangan peserta bagi Kursus Pengurusan ialah x orang dan bilangan peserta bagi Kursus Kewangan ialah y orang. Pengambilan peserta berdasarkan kekangan berikut.
 - Jumlah peserta Kursus Pengurusan dan Kursus Kewangan tidak melebihi 80 orang.
 - Bilangan peserta Kursus Kewangan tidak melebihi empat kali bilangan peserta Kursus Pengurusan.
 - Bilangan peserta Kursus Kewangan mesti melebihi bilangan peserta Kursus Pengurusan sekurang-kurangnya 10 orang.
 - Selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tuliskan tiga ketaksamaan linear yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 orang peserta pada kedua-dua paksi, bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan graf di (b), cari
 - julat bagi bilangan peserta Kursus Kewangan jika bilangan peserta bagi Kursus Pengurusan ialah 20 orang,
 - jumlah yuran maksimum dalam masa seminggu yang boleh dikutip jika yuran mingguan bagi Kursus Pengurusan dan Kursus Kewangan masing-masing ialah RM60 dan RM70.



- Sebuah kilang menghasilkan arca pasu A dan pasu B dengan menggunakan mesin P dan Q . Jadual di bawah menunjukkan masa yang diambil untuk menghasilkan arca pasu A dan pasu B .

Arca pasu	Masa yang diambil (minit)	
	Mesin P	Mesin Q
A	40	30
B	20	60



Pasu A



Pasu B

Kilang tersebut menghasilkan x unit arca pasu A dan y unit arca pasu B dalam masa seminggu. Mesin P beroperasi tidak melebihi 2 000 minit. Mesin Q pula beroperasi sekurang-kurangnya 1 800 minit. Penghasilan arca pasu B tidak melebihi tiga kali ganda penghasilan arca pasu A .

- Selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tuliskan tiga ketaksamaan yang memenuhi semua kekangan di atas.
- Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 unit pada kedua-dua paksi, bina dan lorekkan rantau R yang memuaskan semua kekangan itu.
- Dengan menggunakan graf yang dibina di (b), cari
 - bilangan minimum arca pasu B yang boleh dihasilkan jika kilang tersebut bercadang untuk menghasilkan 30 unit arca pasu A sahaja,
 - jumlah keuntungan maksimum seminggu jika keuntungan yang diperoleh daripada satu unit arca pasu A dan satu unit arca pasu B masing-masing ialah RM300 dan RM250.

Latihan Formatif

7.2

Kuiz

bit.ly/2ZhfBzA



- Seorang tukang kebun ingin menanam pokok bunga raya dan pokok bunga ros di atas sebidang tanah yang berkeluasan 300 m². Beliau mempunyai sekurang-kurangnya RM1 000 untuk membeli anak pokok tersebut. Harga bagi sepohon bunga raya ialah RM4 dan keluasan tanah yang diperlukan ialah 0.4 m². Harga bagi sepohon bunga ros pula ialah RM5 dan keluasan tanah yang diperlukan ialah 0.3 m². Bilangan pokok bunga ros yang ditanam mesti melebihi bilangan pokok bunga raya selebih-lebihnya 200.
 - Selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tuliskan tiga ketaksamaan yang memenuhi semua kekangan di atas jika x mewakili bilangan pokok bunga raya dan y mewakili bilangan pokok bunga ros.
 - Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 100 pokok pada paksi- x dan paksi- y , lukis dan lorekkan rantau yang memuaskan semua ketaksamaan di (a).
 - Daripada graf yang dibina di (b), jawab setiap soalan yang berikut.
 - Cari bilangan maksimum pokok bunga ros jika bilangan pokok bunga raya ialah 300.
 - Dalam satu tempoh tertentu, pokok bunga raya dan pokok bunga ros menghasilkan keuntungan masing-masing sebanyak RM3.50 dan RM2.40. Cari keuntungan maksimum yang diperoleh tukang kebun tersebut.
- Encik Malik memperuntukkan RM3 000 untuk membeli x naskhah buku rujukan Sains dan y naskhah buku rujukan Matematik bagi perpustakaan sekolah. Kos purata bagi senaskhah buku rujukan Sains dan senaskhah buku rujukan Matematik masing-masing ialah RM30 dan RM25. Bilangan buku rujukan Sains yang dibeli adalah sekurang-kurangnya 20 naskhah dan bilangan buku rujukan Matematik yang dibeli adalah sekurang-kurangnya 10 naskhah lebih daripada buku rujukan Sains.
 - Tuliskan tiga ketaksamaan linear yang memenuhi semua syarat yang diberikan selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
 - Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 20 naskhah buku pada kedua-dua paksi, bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua syarat yang diberikan.
 - Daripada graf yang diperoleh di (b), cari kos minimum bagi buku-buku tersebut.
- Sebuah kilang minuman menghasilkan dua jenis minuman, P dan Q . Bagi memenuhi kehendak pengguna, kilang tersebut mestilah menghasilkan x liter minuman P dan y liter minuman Q . Pengeluaran minuman dari kilang tersebut tertakluk kepada tiga kekangan yang berikut.
 - Jumlah isi padu minuman yang dihasilkan adalah tidak lebih daripada 7 000 liter.
 - Isi padu minuman Q yang dihasilkan adalah paling banyak, iaitu dua kali isi padu minuman P yang dihasilkan.
 - Isi padu minuman Q yang dihasilkan adalah sekurang-kurangnya 1 000 liter.
 - Tuliskan tiga ketaksamaan linear, selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan skala 1 cm kepada 1 000 liter pada paksi- x dan paksi- y , bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Berdasarkan graf yang diperoleh di (b), jawab setiap soalan yang berikut.
 - Pada hari tertentu, isi padu minuman Q yang dihasilkan ialah 2 000 liter. Cari isi padu maksimum bagi minuman P .
 - Jika keuntungan per liter bagi minuman P dan minuman Q masing-masing ialah RM50 dan RM30, cari keuntungan maksimum yang diperoleh kilang tersebut.

BAB

7

PENGATURCARAAN LINEAR

Diberi garis lurus $ax + by = c$, dengan keadaan $b > 0$.

- Rantau di bahagian atas garis lurus itu memuaskan ketaksamaan $ax + by \geq c$ dan $ax + by > c$.
- Rantau di bahagian bawah garis lurus itu memuaskan ketaksamaan $ax + by \leq c$ dan $ax + by < c$.

Aplikasi

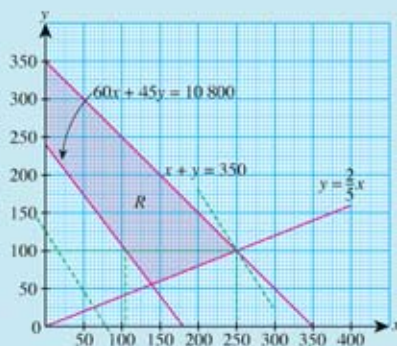
Langkah-langkah untuk menyelesaikan suatu masalah yang melibatkan pengaturcaraan linear:

1. Wakilkan semua kekangan bagi suatu situasi dalam bentuk ketaksamaan linear.
2. Lukis graf bagi setiap ketaksamaan linear dan lorekkan rantau yang tersaur.
3. Tentukan fungsi objektif $ax + by = k$ dan lukis graf bagi fungsi objektif itu.
4. Tentukan nilai optimum (nilai maksimum atau minimum) dengan menggantikan titik maksimum atau minimum ke dalam fungsi objektif.



Penulisan Jurnal

Rajah di sebelah menunjukkan penyelesaian bagi menentukan keuntungan maksimum suatu perniagaan. R ialah rantau yang memenuhi semua kekangan yang terdapat dalam perniagaan tersebut. Bina suatu jurnal yang berkaitan dengan perniagaan tersebut dan persembahkan hasil dapatan anda di hadapan kelas.





Latihan Sumatif

1. Sebuah keluarga di sebuah kampung menghasilkan dua jenis kerusi rotan, iaitu kerusi rotan kecil dan kerusi rotan besar. Keluarga tersebut memperoleh bahan mentah rotan sekurang-kurangnya 60 kg seminggu. Sebuah kerusi rotan kecil memerlukan 3 kg rotan manakala sebuah kerusi rotan besar memerlukan 5 kg rotan. Jumlah pekerja yang ada adalah seramai 60 orang. Dua orang pekerja diperlukan untuk menghasilkan kerusi rotan kecil manakala tiga orang pekerja diperlukan untuk menghasilkan kerusi rotan besar. **TP 4**

- Jika x buah kerusi rotan kecil dan y buah kerusi rotan besar dihasilkan pada setiap minggu, tuliskan empat ketaksamaan linear yang memuaskan syarat-syarat tersebut.
- Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 5 buah kerusi rotan pada kedua-dua paksi, bina dan lorekkan kawasan R yang memuaskan semua ketaksamaan linear tersebut.
- Harga bagi sebuah kerusi rotan kecil ialah RM40 dan harga bagi sebuah kerusi rotan besar ialah RM80. Daripada graf yang diperoleh di (b), cari
 - nilai x dan nilai y yang akan memberi pendapatan maksimum kepada keluarga itu,
 - pendapatan maksimum itu.

2. Seorang tukang masak mengambil masa 2.5 jam untuk membakar sebiji kek oren dan 3 jam untuk membakar sebiji kek strawberi. Kos bagi membuat sebiji kek oren dan kek strawberi masing-masing ialah RM15 dan RM20. Dalam seminggu, x biji kek oren dan y biji kek strawberi boleh dihasilkan berdasarkan syarat yang berikut. **TP 5**

- Tukang masak itu bekerja sekurang-kurangnya 30 jam seminggu.
 - Kos untuk membakar kedua-dua kek itu tidak lebih daripada RM300 seminggu.
 - Bilangan kek oren tidak lebih daripada dua kali bilangan kek strawberi.
- Tuliskan tiga ketaksamaan linear, selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, yang memuaskan semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan skala 2 cm bagi mewakili 2 biji kek pada kedua-dua paksi, bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan graf yang diperoleh di (b), cari keuntungan maksimum yang diterima oleh tukang masak itu dalam seminggu jika sebiji kek oren dan kek strawberi masing-masing memberi keuntungan RM17 dan RM20.

3. Sebuah pejabat pos ingin menghantar 600 bungkusan ke bandar M dengan menggunakan x buah lori dan y buah van. Pengangkutan bagi setiap bungkusan itu berdasarkan kekangan yang berikut. **TP 5**

- Sebuah lori boleh membawa 120 bungkusan manakala sebuah van boleh membawa 50 bungkusan.
 - Bilangan van yang digunakan adalah tidak lebih daripada tiga kali bilangan lori.
 - Bilangan van yang digunakan adalah sekurang-kurangnya 2 buah.
- Selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, tuliskan tiga ketaksamaan linear yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Menggunakan skala 2 cm kepada sebuah lori pada paksi- x dan 2 cm kepada dua buah van pada paksi- y , bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - Dengan menggunakan graf yang diperoleh di (b), cari
 - julat bilangan lori jika 2 buah van digunakan,
 - jumlah kos pengangkutan maksimum jika kos pengangkutan untuk sebuah lori dan sebuah van masing-masing ialah RM150 dan RM100.



4. Sekolah Menengah Kebangsaan Setia Indah menganjurkan satu kem motivasi. Peserta bagi kem motivasi itu terdiri daripada x orang murid perempuan dan y orang murid lelaki. Yuran bagi seorang murid perempuan ialah RM100 manakala yuran bagi seorang murid lelaki ialah RM120. Bilangan murid yang menyertai kem tersebut adalah berdasarkan kekangan berikut. **TP 5**

- I Bilangan maksimum murid yang menyertai kem itu ialah 80 orang.
 - II Nisbah bilangan murid perempuan kepada murid lelaki adalah sekurang-kurangnya 1 : 3.
 - III Jumlah yuran yang dikutip adalah tidak kurang daripada RM5 000.
- (a) Tulis tiga ketaksamaan linear yang memenuhi semua kekangan di atas selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
 - (b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 10 orang murid pada paksi- x dan paksi- y , bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
 - (c) Dengan menggunakan graf yang diperoleh di (b), cari
 - (i) bilangan minimum murid lelaki jika nisbah bilangan murid perempuan kepada murid lelaki adalah 1 : 3,
 - (ii) keuntungan maksimum yang diperoleh jika pihak sekolah memperoleh keuntungan sebanyak 25% daripada jumlah yuran yang dikutip.



5. Sebuah kilang menghasilkan dua jenis almari, iaitu almari A dan almari B. Setiap almari memerlukan dua jenis bahan mentah P dan Q . Bilangan setiap bahan mentah yang diperlukan untuk menghasilkan seunit almari A dan seunit almari B masing-masing ditunjukkan dalam jadual di bawah. **TP 6**

Almari	Bilangan bahan mentah	
	P	Q
A	2	3
B	5	2



Almari A



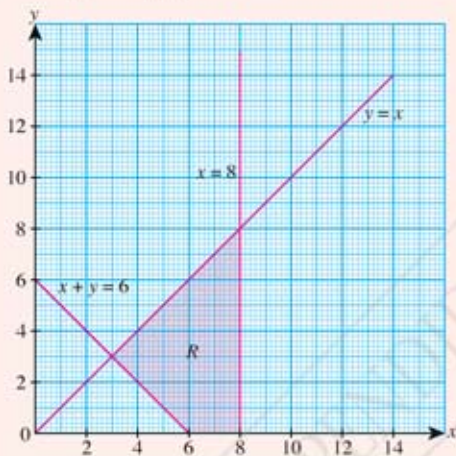
Almari B

Bilangan bahan mentah P dan Q yang terdapat di kilang tersebut masing-masing ialah 30 unit dan 24 unit. Diberi bahawa bilangan almari A yang dihasilkan adalah selebih-lebihnya dua kali ganda daripada bilangan almari B. Katakan kilang tersebut menghasilkan x unit almari A dan y unit almari B.

- (a) Tuliskan tiga ketaksamaan linear, selain $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, yang memenuhi semua kekangan di atas.
- (b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 2 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , bina dan lorekkan rantau R yang memenuhi semua kekangan di atas.
- (c) Berdasarkan graf yang diperoleh di (b), cari
 - (i) bilangan maksimum almari B yang dihasilkan jika kilang tersebut menghasilkan 4 unit almari A.
 - (ii) keuntungan maksimum yang diperoleh kilang tersebut jika keuntungan daripada jualan seunit almari A ialah RM200 dan seunit almari B ialah RM250.

EKSPLORASI MATEMATIK

- (a) Dalam kumpulan anda, bincangkan secara *Hot Seat* mengenai perkara yang berikut. Diberi rantau di sebelah garis lurus $ax + by = c$. Jika $b < 0$, rantau yang manakah memuaskan $ax + by \geq 0$?
- (b) Sebuah sekolah diberi peruntukan untuk membeli komputer jenis A dan jenis B bagi makmal komputernya berdasarkan kepada syarat-syarat tertentu yang diwakili oleh rantau R dalam rajah di bawah. Jumlah komputer yang dibeli adalah sekurang-kurangnya 6 unit.



Sudut Informasi

Langkah-langkah pembelajaran berasaskan aktiviti *Hot Seat*.

1. Seorang murid yang pakar akan duduk di sebuah kerusi.
2. Murid dalam kumpulan akan mengemukakan soalan berkaitan masalah.
3. Murid yang pakar akan menjawab semua soalan.
4. Setiap kumpulan akan membuat kesimpulan untuk semua masalah yang dilontarkan.

- (i) Nyatakan perkara yang diwakili oleh paksi-x dan paksi-y.
- (ii) Selain bilangan komputer jenis A atau jenis B adalah lebih besar daripada sifar, nyatakan dalam bentuk ayat tiga syarat yang lain.
- (iii) Jika sekolah tersebut membeli 6 unit komputer jenis A, berapakah bilangan maksimum komputer B yang boleh dibeli?
- (iv) Jika kos sebuah komputer jenis A dan sebuah komputer jenis B masing-masing ialah RM1 500 dan RM2 000, cari peruntukan maksimum yang diperlukan oleh sekolah itu.