

BAB 8

Graf Fungsi

ANDA AKAN MEMPELAJARI



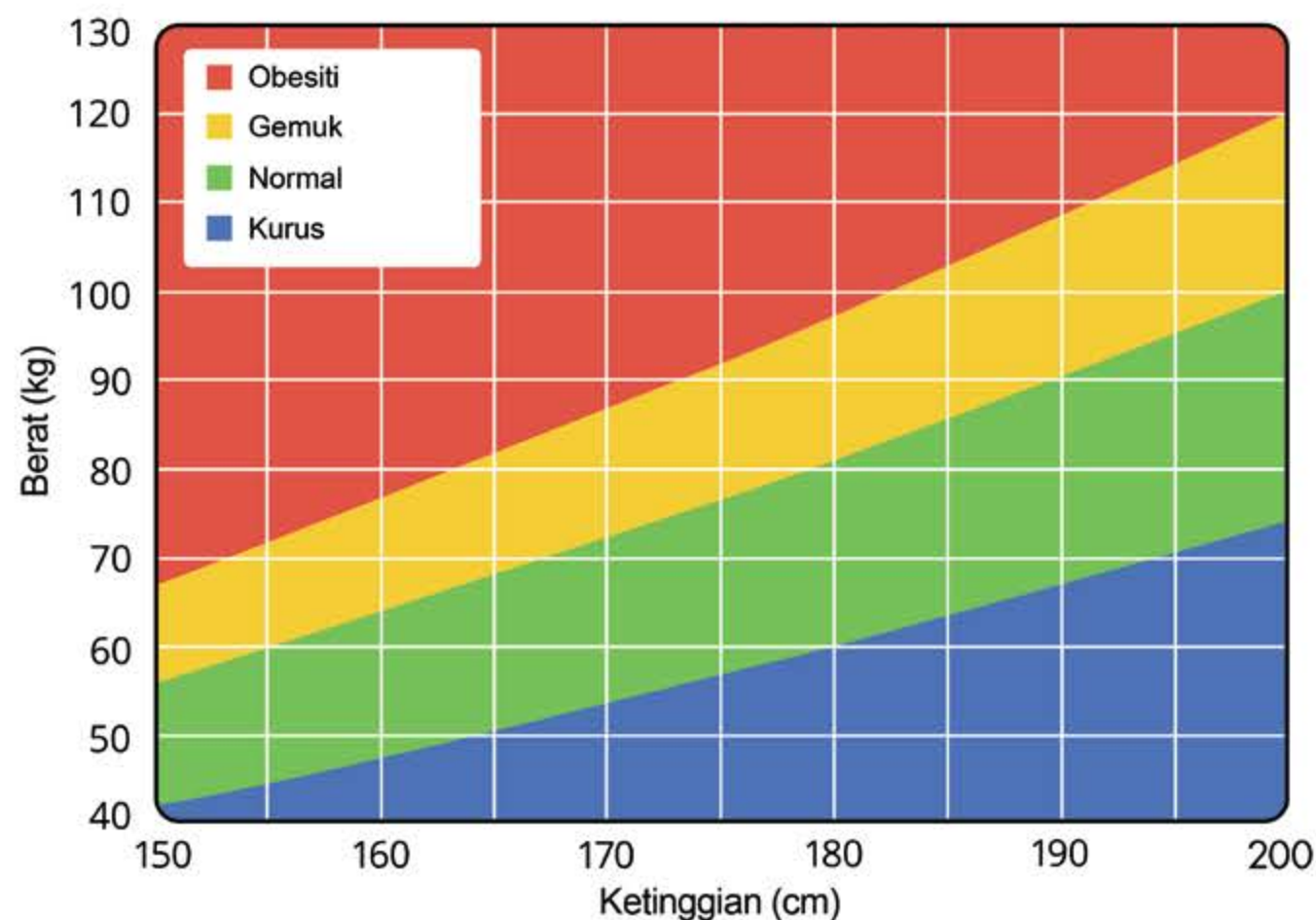
- 8.1 Fungsi
- 8.2 Graf Fungsi



RANGKAI KATA

- Graf fungsi
- Fungsi
- Pemboleh ubah
- Hubungan
- Persamaan linear
- Jadual nilai
- Fungsi linear
- Fungsi bukan linear
- Skala
- Fungsi salingan
- Fungsi kubik
- Fungsi kuadratik
- *Graph of function*
- *Function*
- *Variable*
- *Relation*
- *Linear equation*
- *Table of value*
- *Linear function*
- *Non-linear function*
- *Scale*
- *Reciprocal function*
- *Cubic function*
- *Quadratic function*

Indeks Jisim Badan (IJB) ialah satu ukuran anggaran lemak di dalam badan berdasarkan berat dan tinggi seseorang. Ukuran IJB yang tinggi ialah tanda kandungan lemak yang banyak. Hitungkan IJB anda.



IMBASAN SILAM

René Descartes (1596-1650), menyatakan bahawa fungsi ialah hubungan matematik antara dua pemboleh ubah. Perkataan 'fungsi' telah diperkenal oleh Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) dalam bukunya. Idea konsep fungsi ini disambung oleh Leonhard Euler (1707-1783) dan beliau memperkenalkan tatatanda fungsi, iaitu $y = f(x)$.

Untuk maklumat lanjut:



http://rimbunanilmu.my/mat_t2/ms145

MASLAHAT BAB INI

- Fungsi banyak diaplikasikan dalam bidang ekonomi, teknologi, sains, kejuruteraan, perbankan dan matematik. Kerjaya yang memerlukan pengetahuan tentang fungsi, antaranya ialah jurutera, ahli ekonomi, juruaudit, pensyarah dan pegawai bank.
- Melalui fungsi indeks pasaran saham, kita dapat meramalkan masa yang sesuai untuk membeli atau menjual sesuatu saham.

AKTIVITI KREATIF

Tujuan: Menenal hubungan antara dua kuantiti

Bahan: Lembaran kerja

Langkah:

1. Gambar di bawah menunjukkan iklan tiket taman tema air mengikut kategori. Berdasarkan iklan tersebut, lengkapkan jadual di bawah.

TAMAN TEMA AIR

Harga Tiket

KATEGORI

Dewasa : RM30.00

Kanak-kanak : RM20.00

Warga emas/OKU : RM10.00

Kanak-kanak 90 cm ke atas atau 3 -12 tahun

Semua harga termasuk GST: 6%

Keluarga	Kategori		
	Dewasa	Kanak-kanak	Warga emas/OKU
1			
2			
3			
Jumlah			

2.

Kategori	Bilangan	Harga	Jumlah (RM)
Dewasa	2	2×30	60
Kanak-kanak			
Warga emas/OKU			
Jumlah			

3. Daripada jadual di atas, apakah kaitan antara jumlah bayaran tiket bagi setiap keluarga dengan kategori ahli keluarganya?

Daripada jadual di atas, dapat diketahui bahawa jumlah harga tiket bergantung kepada bilangan dan kategori ahli keluarga.

8.1 Fungsi

8.1.1 Definisi fungsi

RANGSANGAN MINDA

Berkumpulan

Tujuan: Menenal fungsi

Bahan: Lembaran kerja dan kalkulator

Langkah:

1. Gunakan simbol $\sqrt[3]{}$ (punca kuasa tiga) dalam kalkulator anda untuk menenal pasti nombor output bagi beberapa nombor input dan lengkapkan jadual A.
2. Gunakan simbol x^3 (kuasa tiga) dalam kalkulator anda untuk menenal pasti nombor output bagi beberapa nombor input dan lengkapkan jadual B.

STANDARD PEMBELAJARAN

Menerangkan maksud fungsi.

Input	$\sqrt[3]{}$	Output
64	$\sqrt[3]{64}$	4
27	$\sqrt[3]{27}$	3
0		
$\frac{1}{8}$		
$\frac{1}{125}$		

Jadual A

Input	x^3	Output
2	2^3	8
3	3^3	27
5		
7		
10		

Jadual B

Perbincangan:

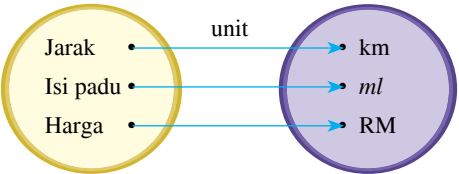
Jika input itu ialah domain manakala output itu julat, tentukan julat untuk set $A = \{64, 27, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{125}\}$ dan set $B = \{2, 3, 5, 7, 10\}$.

Daripada aktiviti di atas, fungsi merupakan hubungan setiap input mempunyai hanya satu output.

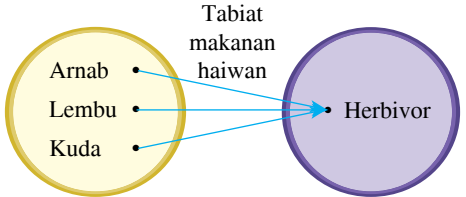
► Menenal pasti fungsi

Terdapat dua jenis hubungan yang menghasilkan fungsi

(a) Hubungan satu kepada satu

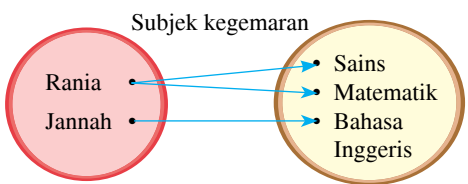


(b) Hubungan banyak kepada satu

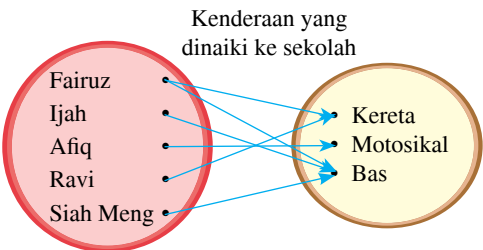


Terdapat dua jenis hubungan yang bukan fungsi

(a) Hubungan satu kepada banyak



(b) Hubungan banyak kepada banyak

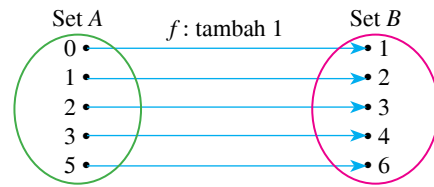


Hubungan ialah padanan unsur dari set A kepada set B. Hubungan dapat diwakili dengan menggunakan

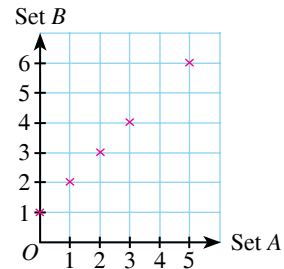
- (a) rajah anak panah
- (b) graf
- (c) pasangan tertib

CONTOH 1

(a) Rajah anak panah

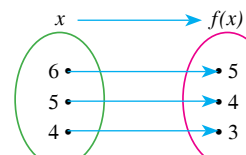


(b) Graf



(c) Pasangan tertib

$$P = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$$

TAHUKAH ANDA ? x memetakan ke $f(x)$ 

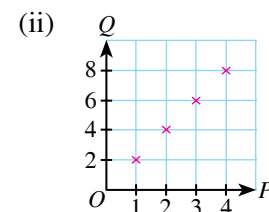
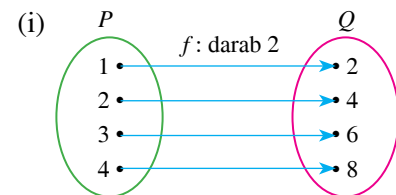
Hubungan di atas ialah fungsi 'tolak 1', ditulis dengan tatatanda berikut:

$$f: x \rightarrow x - 1 \text{ atau } f(x) = x - 1$$

CONTOH 2

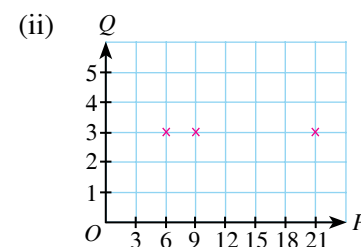
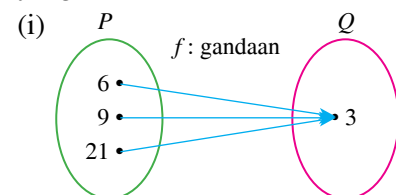
(a) Fungsi satu kepada satu

Fungsi satu kepada satu ialah hubungan yang mana objek dalam domain mempunyai hanya satu imej.

(iii) Pasangan tertib, $A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

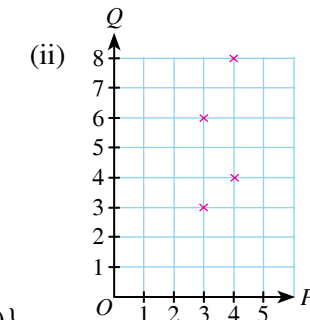
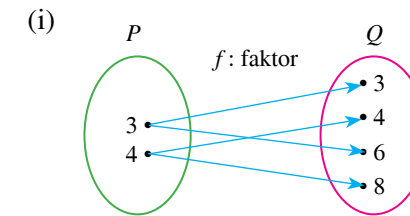
(b) Fungsi banyak kepada satu

Fungsi banyak kepada satu ialah hubungan yang lebih dari satu objek dihubungkan dengan imej yang sama.

(iii) Pasangan tertib, $B = \{(6, 3), (9, 3), (21, 3)\}$

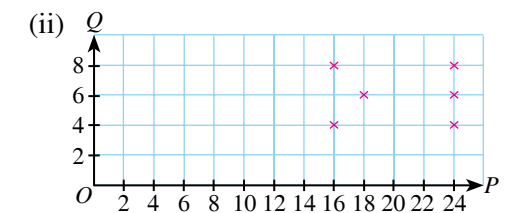
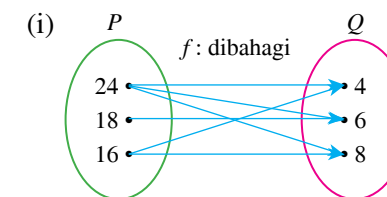
(c) Hubungan satu kepada banyak

Hubungan satu kepada banyak ialah hubungan yang mana objek dalam domain mempunyai lebih dari satu imej.

(iii) Pasangan tertib, $R = \{(3, 3), (3, 4), (4, 6), (4, 8)\}$

(d) Hubungan banyak kepada banyak

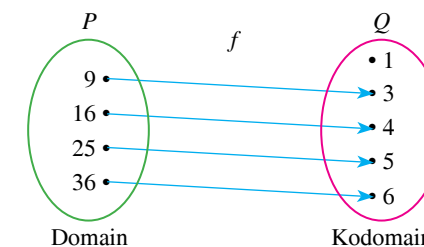
Hubungan banyak kepada banyak ialah hubungan yang mana sekurang-kurangnya satu objek mempunyai lebih dari satu imej dan lebih dari satu objek mempunyai imej yang sama.

(iii) Pasangan tertib, $S = \{(24, 4), (24, 6), (24, 8), (18, 6), (16, 4), (16, 8)\}$

Berikan justifikasi berdasarkan pemerhatian hubungan yang diwakili oleh graf dalam contoh di atas.

IMBAS KEMBALI

Graf garis lurus diperoleh apabila semua pasangan tertib bagi persamaan linear diplot dan disambungkan.

8.1.2 Perwakilan fungsiRajah di bawah menunjukkan fungsi, f yang memetakan x kepada $\sqrt{x}$ yang ditulis sebagai $f(x) = \sqrt{x}$.Set $P = \{9, 16, 25, 36\}$ ialah domain dan unsur-unsurnya dinamakan objek. Set $Q = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ ialah kodomain. Unsur-unsur dalam set Q yang dihubungkan kepada objek dalam set P dinamakan imej. Julat bagi fungsi itu ialah $\{3, 4, 5, 6\}$.**STANDARD PEMBELAJARAN**

Mengetahui pasti fungsi dan memberi justifikasi berdasarkan perwakilan fungsi dalam bentuk pasangan tertib, jadual, graf dan persamaan.

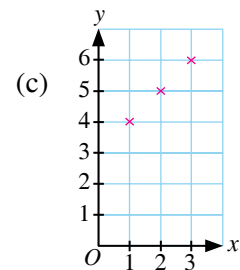
CONTOH 3

Diberi set $P = \{1, 2, 3\}$ dan set $Q = \{4, 5, 6\}$. Fungsi, f yang memetakan set P kepada set Q ialah menambah 3. Wakilkan hubungan di atas menggunakan

- (a) pasangan tertib (b) jadual (c) graf (d) persamaan

Penyelesaian:

- (a) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$



(b)

P	1	2	3
Q	4	5	6

- (d) $4 = 1 + 3$
 $5 = 2 + 3$
 $6 = 3 + 3$
 $y = x + 3$ atau $f(x) = x + 3$

Fungsi yang memetakan x kepada y boleh ditulis menggunakan tatatanda fungsi iaitu $f(x)$.

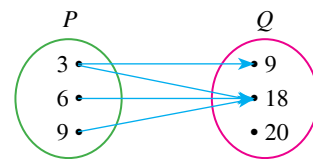
Maka, fungsi ini boleh ditulis sebagai $f(x) = x + 3$.

JOM CUBA 8.1

1. Rajah di sebelah menunjukkan hubungan antara set P dan set Q .

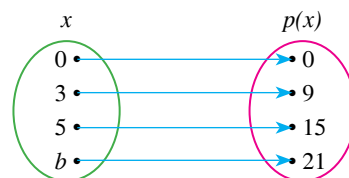
Nyatakan

- (a) jenis hubungan.
 (b) julat hubungan itu.



2. Rajah di sebelah menunjukkan satu fungsi.

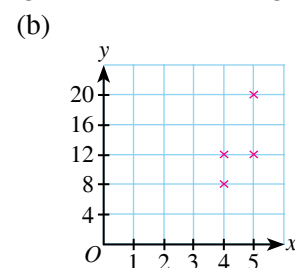
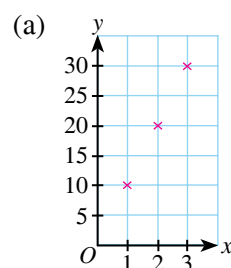
Nyatakan nilai b .



3. Tentukan sama ada set pasangan tertib berikut ialah fungsi.

- (a) $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
 (b) $Q = \{(1, 3), (0, 3), (2, 1), (4, 2)\}$
 (c) $R = \{(1, 6), (2, 5), (1, 9), (4, 3)\}$

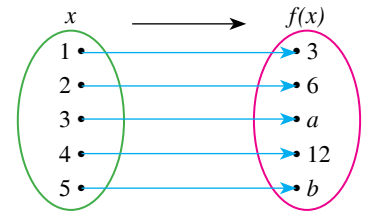
4. Tentukan sama ada hubungan dalam graf berikut ialah fungsi atau bukan fungsi.



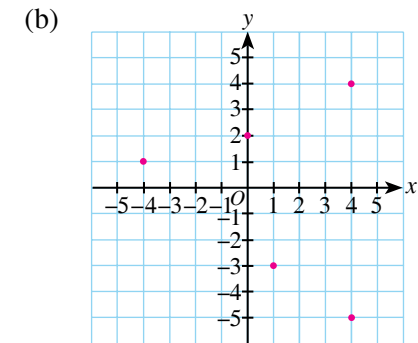
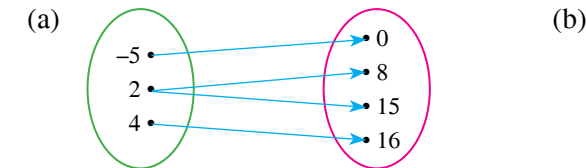
5. Diberi set $S = \{10, 12, 18, 20\}$ dan set $R = \{2, 4, 10, 12\}$. Hubungan dari set S kepada set R ialah tolak 8. Wakilkan fungsi tersebut menggunakan
 (a) pasangan tertib (b) jadual (c) graf (d) persamaan

6. Rajah berikut menunjukkan fungsi $f(x) = 3x$ dalam domain $1 \leq x \leq 5$.

Tentukan nilai a dan b .



7. Nyatakan domain dan julat hubungan berikut.

**8.2 Graf Fungsi**

Kita telah mempelajari bahawa perwakilan fungsi boleh dibuat dalam bentuk graf. Graf fungsi ialah perwakilan fungsi pada satah Cartes. Dengan melukis graf, kita dapat menjelaskan hubungan antara pemboleh ubah dalam fungsi tersebut. Graf ini juga akan membantu kita mengenal pasti beberapa maklumat bagi menyelesaikan masalah.



Gambar menunjukkan seorang pemain bola sepak menyepak bola, menyebabkan bola itu melambung dan menurun. Lambungan bola itu membentuk suatu lengkung.

Katakan lengkung itu mewakili fungsi $s = 25t - 2.5t^2$, dengan t ialah masa dalam saat dan s ialah tinggi dalam meter. Hubungan antara s dengan t dapat dilukis dalam bentuk graf. Beberapa maklumat boleh diperolehi daripada graf itu seperti ketinggian maksimum bola, masa bola itu sampai ke tanah semula dan jarak dari tempat tendangan.

TAHUKAH ANDA?

Bintang bola sepak Malaysia dari Pulau Pinang, Mohd Faiz Subri mendapat penghargaan Anugerah Puskas (FIFA) untuk gol terbaik 2016.

8.2.1 Membina jadual nilai

Daripada fungsi yang diberikan, suatu **jadual nilai** dapat dibina untuk menentukan **pasangan tertib** (x, y) yang sepadan sebelum graf dilukiskan.

STANDARD PEMBELAJARAN

Membina jadual nilai bagi fungsi linear dan bukan linear, dan seterusnya melukis graf menggunakan skala yang diberikan.

CONTOH 4

- (a) Bina satu jadual nilai bagi fungsi $y = 5 - x$, bagi nilai $x = -2, -1, 0, 1$.
- (b) Bina satu jadual nilai bagi fungsi $y = 2x^2 - 1$, bagi nilai $x = -1$ hingga 2 .

Penyelesaian:

Apabila $x = -2$	Apabila $x = -1$	Apabila $x = 0$	Apabila $x = 1$
$y = 5 - x$	$y = 5 - x$	$y = 5 - x$	$y = 5 - x$
$y = 5 - (-2)$	$y = 5 - (-1)$	$y = 5 - 0$	$y = 5 - 1$
$y = 5 + 2$	$y = 5 + 1$	$y = 5$	$y = 4$
$y = 7$	$y = 6$		

Maka, jadual nilai bagi fungsi $y = 5 - x$ ialah

x	-2	-1	0	1
y	7	6	5	4

Apabila $x = -1$	Apabila $x = 0$	Apabila $x = 1$	Apabila $x = 2$
$y = 2x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$
$y = 2(-1)^2 - 1$	$y = 2(0)^2 - 1$	$y = 2(1)^2 - 1$	$y = 2(2)^2 - 1$
$y = 2 - 1$	$y = 0 - 1$	$y = 2 - 1$	$y = 8 - 1$
$y = 1$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 7$

Maka, jadual nilai bagi fungsi $y = 2x^2 - 1$ ialah

x	-1	0	1	2
y	1	-1	1	7

► Melukis graf

Seterusnya, pasangan tertib (x, y) tadi boleh diplotkan pada satah Cartes mengikut skala yang diberikan. Kemudian, titik-titik ini disambungkan untuk membentuk graf. Bagi memudahkan graf fungsi dibina, kita boleh mengikuti langkah-langkah ini.

Langkah-langkah melukis graf:

1. Bina jadual nilai bagi fungsi yang diberikan.
2. Lukis setiap paksi dengan skala yang diberikan atau dengan skala yang sesuai.
3. Plotkan titik (x, y) bagi pasangan tertib daripada jadual nilai.
4. Sambung titik-titik itu dengan garis lurus atau lengkung yang licin.

TIP

Menggunakan kalkulator untuk menghitung nilai bagi jadual nilai.
Untuk $y = 2x^2 - 1$
Tekan

2 ALPHA) ^ 2 - 1

Bagi

$x = -1$,
tekan CALC -1 =
jawapan = 1

$x = 0$,
tekan CALC 0 =
jawapan = -1

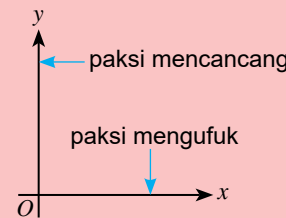
$x = 1$,
tekan CALC 1 =
jawapan = 1

$x = 2$,
tekan CALC 2 =
jawapan = 7



IMBAS KEMBALI

- Koordinat $(0, 0)$ disebut juga sebagai asalan dan ditandakan dengan O .
- Paksi- x juga disebut sebagai paksi mengufuk.
- Paksi- y juga disebut sebagai paksi mencancang.



CONTOH 5

- (a) Lengkapkan jadual nilai di bawah bagi fungsi $y = 2x + 4$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0			6		10

- (b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 2 unit pada paksi- y , lukis graf bagi fungsi itu untuk nilai x dari -2 hingga 3.

Penyelesaian:

- (a) $y = 2x + 4$

Apabila $x = -1$	Apabila $x = 0$	Apabila $x = 2$
$y = 2(-1) + 4$	$y = 2(0) + 4$	$y = 2(2) + 4$
$= -2 + 4$	$= 0 + 4$	$= 4 + 4$
$= 2$	$= 4$	$= 8$

Maka,

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	2	4	6	8	10

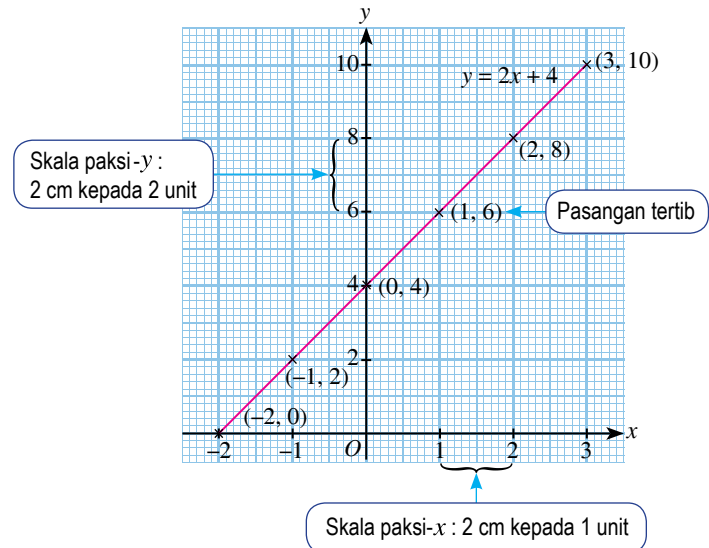
- (b) Lukis paksi mengikut skala yang diberikan.

skala paksi- x : 2 cm kepada 1 unit

skala paksi- y : 2 cm kepada 2 unit

Plotkan titik mengikut pasangan tertib daripada jadual nilai di atas, iaitu $(-2, 0)$, $(-1, 2)$, $(0, 4)$, $(1, 6)$, $(2, 8)$ dan $(3, 10)$.

Sambungkan titik.



Set nilai ini boleh ditulis dalam bentuk $-2 \leq x \leq 3$.

TIP

Graf ini disebut juga sebagai graf fungsi linear, kuasa tertinggi bagi pemboleh ubah x ialah 1.

TAHUKAH ANDA ?

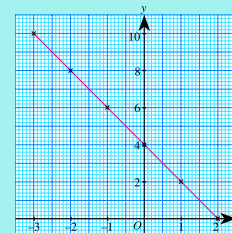
Persamaan garis lurus $y = mx + c$, dengan m ialah kecerunan dan c ialah pintasan- y merupakan set fungsi linear.

TIP

Melukis graf garis lurus mestilah dengan menggunakan pembaris.

JOM FIKIR

Apakah jenis graf fungsi di bawah? Nyatakan fungsi tersebut.



CONTOH 6

(a) Lengkapi jadual nilai di bawah bagi fungsi $y = x^2 - 2x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5		-3			0	5

(b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi-y, lukis graf bagi fungsi itu untuk $-2 \leq x \leq 4$.

Penyelesaian:

(a) $y = x^2 - 2x - 3$

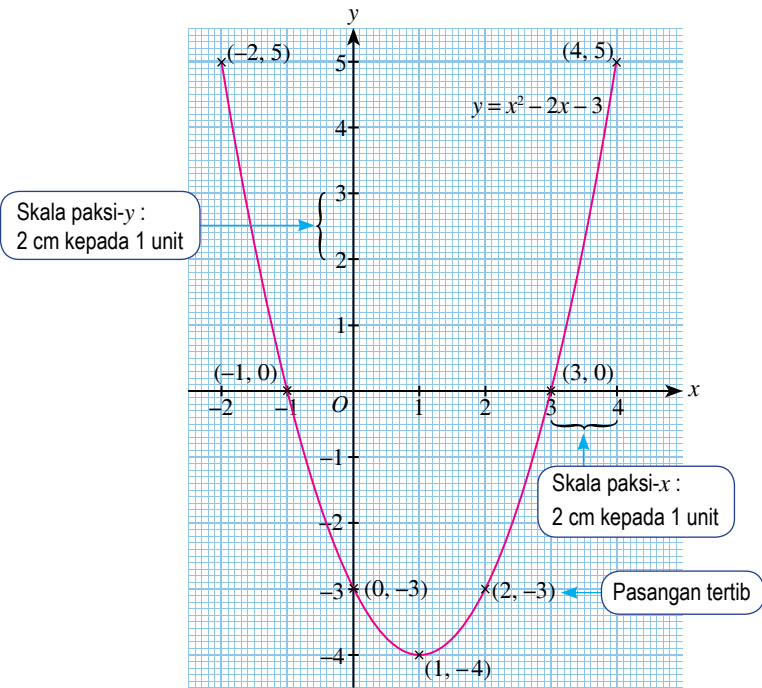
Apabila $x = -1$	Apabila $x = 1$	Apabila $x = 2$
$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3$	$y = 1^2 - 2(1) - 3$	$y = 2^2 - 2(2) - 3$
$= 1 + 2 - 3$	$= 1 - 2 - 3$	$= 4 - 4 - 3$
$= 0$	$= -4$	$= -3$

Maka,

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

(b) Lukis paksi mengikut skala yang diberikan. Plotkan titik mengikut jadual nilai di atas dan sambungkan titik tersebut.

skala paksi-x : 2 cm kepada 1 unit
skala paksi-y : 2 cm kepada 1 unit



TIP

Bagi fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$, kuasa tertinggi bagi pemboleh ubah x ialah 2, dan $a \neq 0$.

TIP

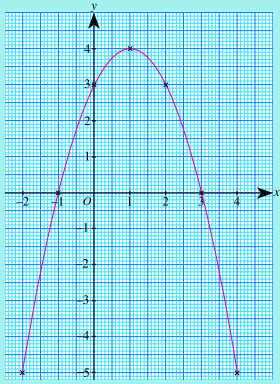
- Mata pensel yang tajam dapat membantu murid melukis garis atau lengkung dengan licin.
- Murid dibenarkan menggunakan pembaris fleksibel untuk melukis garis lengkung.

TAHUKAH ANDA?

Bentuk graf ini dipanggil bentuk parabola.

JOM FIKIR

Apakah jenis graf fungsi di bawah? Nyatakan fungsi tersebut.



CONTOH 7

(a) Lengkapi jadual nilai di bawah bagi fungsi $y = 12 - x^3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	39		13	12			-15

(b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 5 unit pada paksi-y, lukis graf bagi fungsi itu untuk $-3 \leq x \leq 3$.

Penyelesaian:

(a) $y = 12 - x^3$

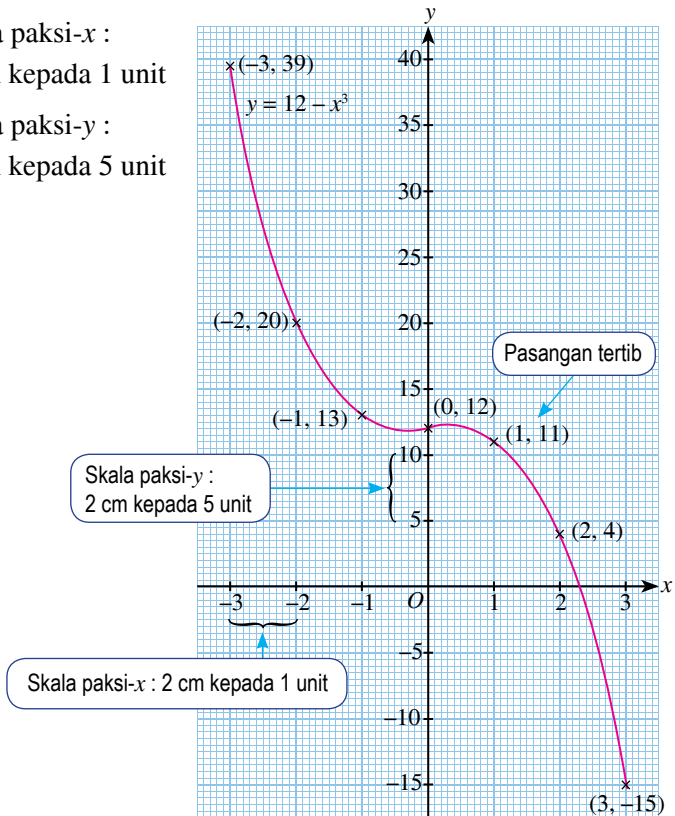
Apabila $x = -2$	Apabila $x = 1$	Apabila $x = 2$
$y = 12 - (-2)^3$	$y = 12 - (1)^3$	$y = 12 - (2)^3$
$= 12 + 8$	$= 12 - 1$	$= 12 - 8$
$= 20$	$= 11$	$= 4$

Maka,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	39	20	13	12	11	4	-15

(b) Lukis paksi mengikut skala yang diberikan. Plotkan titik mengikut jadual nilai di atas dan sambungkan titik tersebut.

skala paksi-x :
2 cm kepada 1 unit
skala paksi-y :
2 cm kepada 5 unit

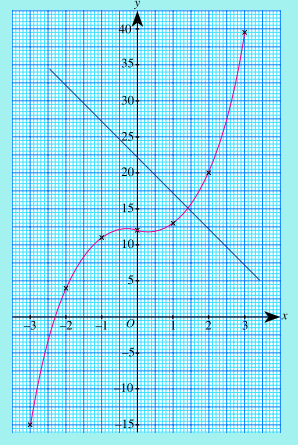


TIP

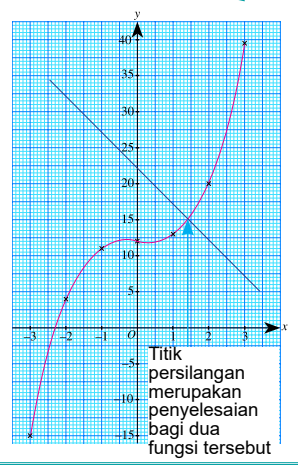
Bagi fungsi kubik $ax^3 + c$, kuasa tertinggi bagi pemboleh ubah x ialah 3, dan $a \neq 0$.

JOM FIKIR

Apakah jenis graf fungsi di bawah? Nyatakan fungsi tersebut.



TAHUKAH ANDA?



CONTOH 8

(a) Lengkapi jadual nilai di bawah bagi fungsi $y = \frac{24}{x}$.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	-6		-12	-24		12	8	

(b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 5 unit pada paksi-y, lukis graf bagi fungsi itu untuk $-4 \leq x \leq 4$.

Penyelesaian:

(a) $y = \frac{24}{x}$

Apabila $x = -3$

$$y = \frac{24}{-3} = -8$$

Apabila $x = 1$

$$y = \frac{24}{1} = 24$$

Apabila $x = 4$

$$y = \frac{24}{4} = 6$$

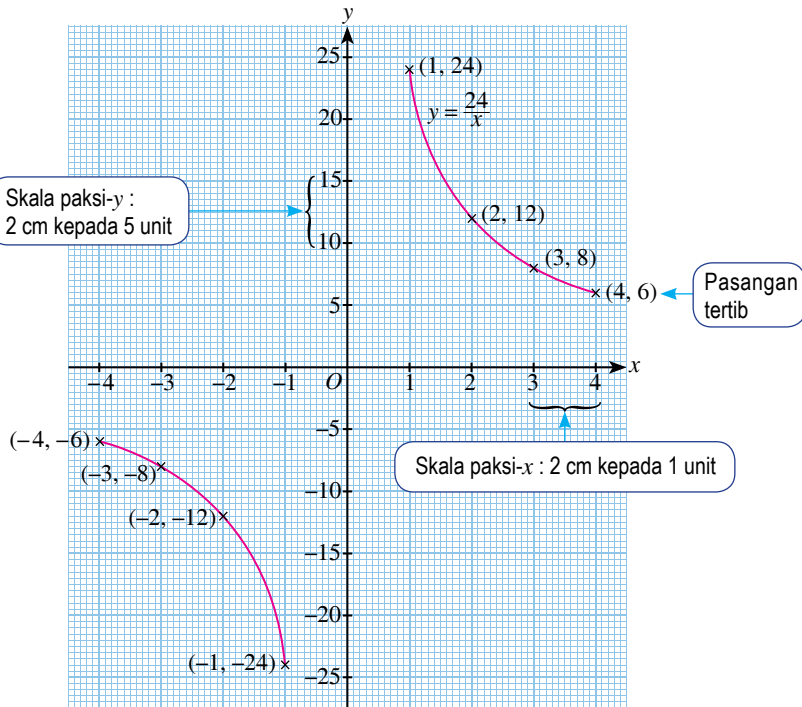
Maka,

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	-6	-8	-12	-24	24	12	8	6

(b) Lukis paksi mengikut skala yang diberikan. Plotkan titik mengikut jadual nilai di atas dan sambungkan titik tersebut.

skala paksi-x : 2 cm kepada 1 unit

skala paksi-y : 2 cm kepada 5 unit

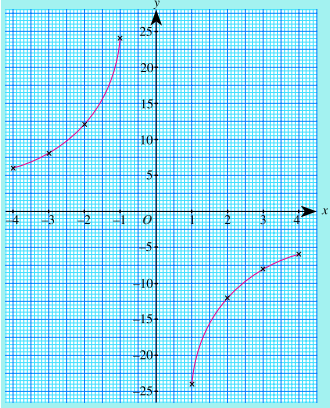


TAHUKAH ANDA ?

Fungsi salingan $y = \frac{a}{x}$ tidak tertakrif jika $x = 0$. Fungsi salingan juga boleh ditulis sebagai $y = ax^{-1}$. Bentuk graf ini dipanggil bentuk hiperbola.

JOM FIKIR

Apakah jenis graf fungsi di bawah? Nyatakan fungsi tersebut.



CONTOH 9

(a) Lengkapi jadual nilai di bawah bagi fungsi $y = x^{-2}$

x	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4
y	0.06		0.25		4		1	0.25	0.11	0.06

(b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi-y, lukis graf bagi fungsi itu untuk $-4 \leq x \leq 4$.

Penyelesaian:

(a) $y = x^{-2}$

Apabila $x = -3$

$$y = (-3)^{-2} = 0.11$$

Apabila $x = -1$

$$y = (-1)^{-2} = 1$$

Apabila $x = 0.5$

$$y = (0.5)^{-2} = 4$$

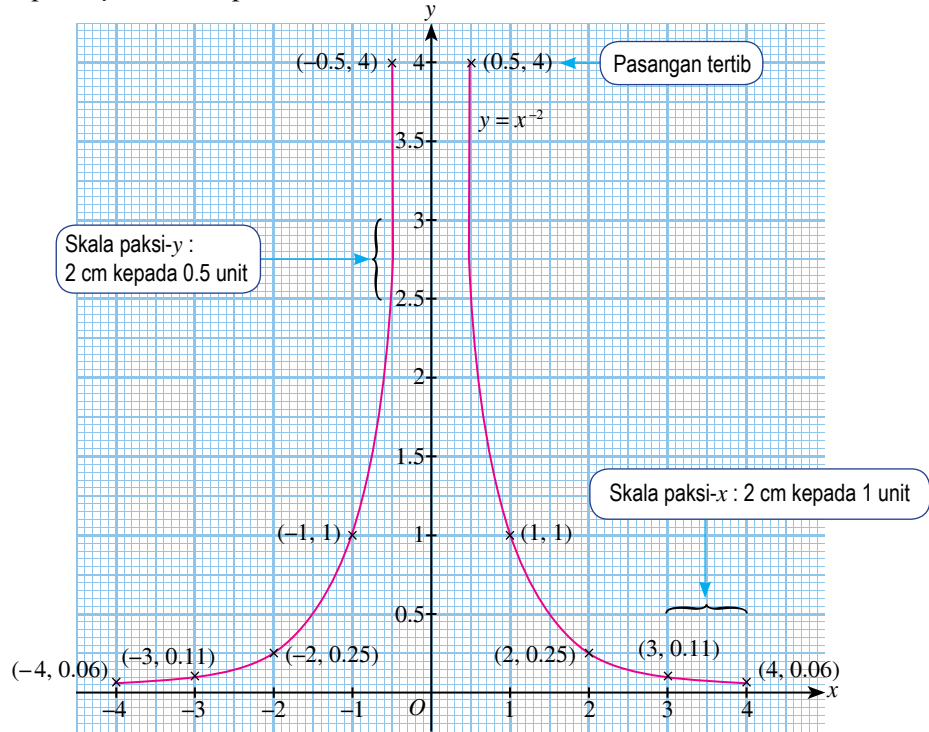
Maka,

x	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4
y	0.06	0.11	0.25	1	4	4	1	0.25	0.11	0.06

(b) Lukis paksi mengikut skala yang diberikan. Plotkan titik mengikut jadual nilai di atas dan sambungkan titik tersebut.

skala paksi-x : 2 cm kepada 1 unit

skala paksi-y : 2 cm kepada 0.5 unit



Bentuk graf ini juga adalah berbentuk hiperbola.

TIP

$y = ax^n$ dengan $n = -1, -2$ merupakan fungsi salingan.

8.2.2 Tafsiran graf fungsi

Daripada graf fungsi yang telah dibina, kita boleh membuat tafsiran dan ramalan terhadap situasi yang berlaku atau akan berlaku mengikut hubungan yang diperoleh daripada pemboleh ubah.

CONTOH 10

Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $y = 2x + 2$.

Berdasarkan graf, tentukan

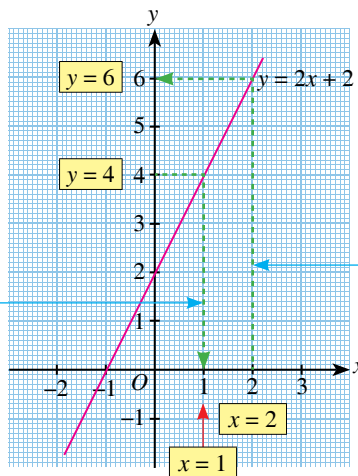
- nilai y apabila $x = 2$.
- nilai x apabila $y = 4$.

Penyelesaian:

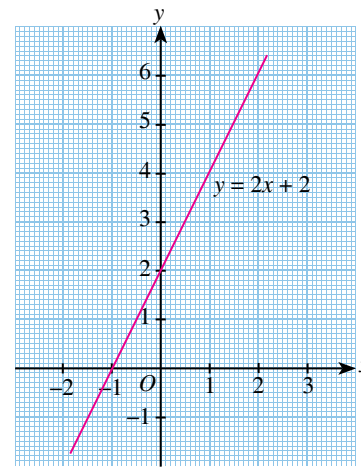
Daripada graf:

- Apabila $x = 2$, maka $y = 6$
- Apabila $y = 4$, maka $x = 1$

Pada $y = 4$, lukis satu garis mengufuk ke kanan sehingga bertemu dengan garis fungsi $y = 2x + 2$. Kemudian, buat satu garis mencancang ke bawah sehingga bertemu dengan paksi- x . Baca nilai x .



Pada $x = 2$, lukis satu garis mencancang ke atas sehingga bertemu dengan garis fungsi $y = 2x + 2$. Kemudian, buat satu garis mengufuk ke kiri sehingga bertemu dengan paksi- y . Baca nilai y .



CONTOH 11

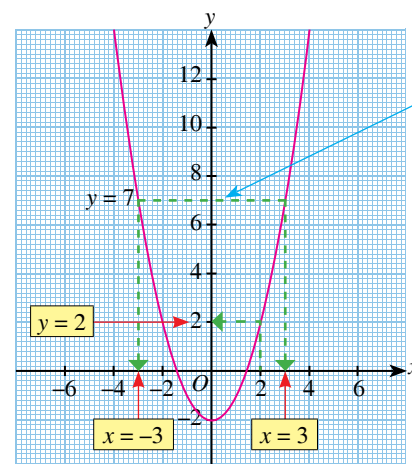
Rajah berikut menunjukkan graf bagi fungsi $y = x^2 - 2$. Berdasarkan graf, tentukan

- nilai y , apabila $x = 2$.
- nilai-nilai x , apabila $y = 7$.

Penyelesaian:

Daripada graf:

- Apabila $x = 2$, maka $y = 2$
- Apabila $y = 7$, maka $x = 3$ dan -3



Buat garis mengufuk $y = 7$, sehingga menyentuh kedua-dua bahagian pada graf $y = x^2 - 2$. Kemudian, buat garis mencancang ke bawah menuju paksi- x .

STANDARD PEMBELAJARAN

Mentafsir graf fungsi.

CONTOH 12

Graf fungsi di sebelah menunjukkan pergerakan sebiji bola yang dijatuhkan dari ketinggian 4 meter. Berdasarkan graf, tentukan

- jarak bola itu dari tanah pada minit pertama.

- masa bola menyentuh tanah.

Penyelesaian:

Daripada graf:

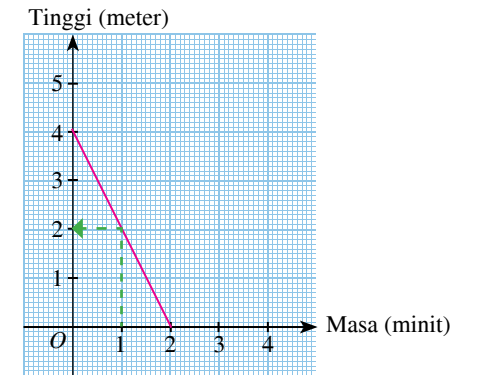
- Apabila $x = 1$, $y = 2$

Maka, jarak bola dari tanah pada minit pertama ialah 2 meter.

- Apabila bola menyentuh tanah, tingginya ialah sifar.

Apabila $y = 0$, $x = 2$

Maka, bola menyentuh tanah pada minit ke-2.



CONTOH 13

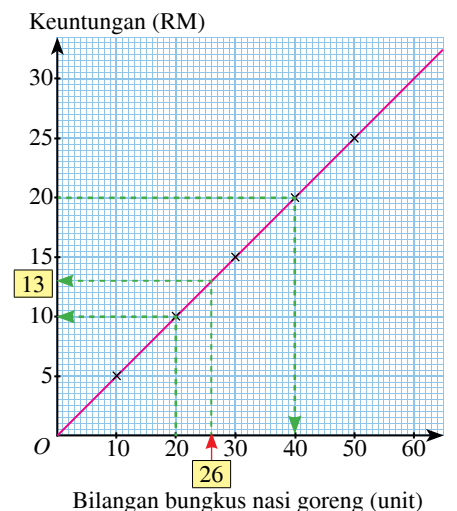
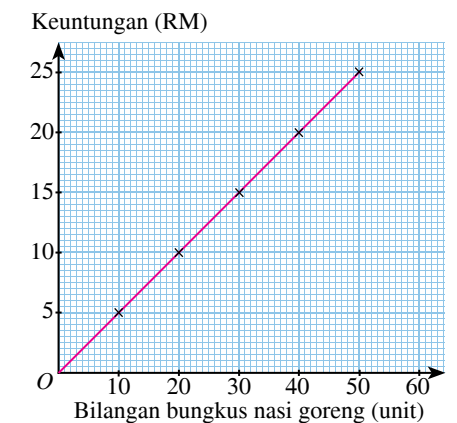
Dalam ekspo keusahawanan yang lepas, Anis telah menjual nasi goreng di gerai Persatuan Pengguna. Graf di sebelah menunjukkan bilangan bungkus nasi goreng yang dijual dengan keuntungan yang diperoleh Anis.

Berdasarkan graf:

- Berapakah keuntungan yang diperoleh Anis sekiranya dia berjaya menjual 20 bungkus nasi goreng?
- Jika Anis mendapat keuntungan sebanyak RM20, berapa bungkus nasi goreng yang telah dijualnya?
- Berapakah keuntungan Anis jika 26 bungkus nasi gorengnya terjual?
- Nyatakan satu inferens yang sesuai bagi graf jualan itu.
- Berdasarkan trend graf tersebut, ramalkan keuntungan Anis jika 60 bungkus nasi gorengnya berjaya dijual.

Penyelesaian:

- Keuntungan = RM10
- Bilangan nasi goreng = 40 bungkus
- Keuntungan = RM13
- Jumlah keuntungan Anis meningkat jika bilangan bungkus nasi goreng yang dijual bertambah.
- RM30



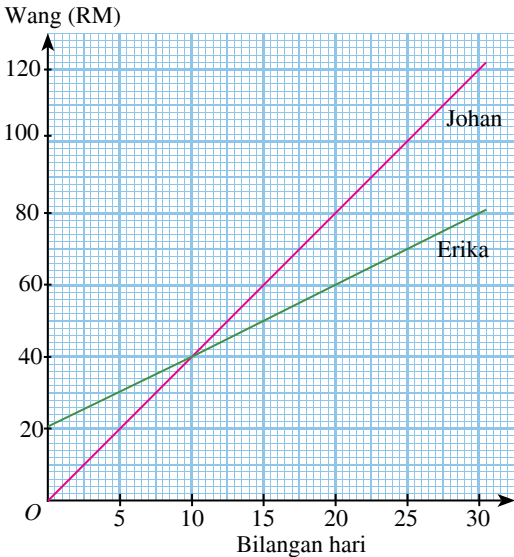
8.2.3 Penyelesaian masalah

CONTOH 14

Setiap hari, Johan dan Erika menerima wang belanja daripada bapa mereka. Mereka akan menyimpan sebahagian daripada wang belanja itu di dalam tabung. Graf di bawah menunjukkan jumlah wang (RM) yang disimpan mengikut bilangan hari.

Berdasarkan graf:

- (a) Berapakah jumlah wang yang disimpan pada hari ke-20 di dalam tabung
 - (i) Johan
 - (ii) Erika
- (b) Bilakah wang Johan dan Erika mempunyai jumlah simpanan yang sama?
- (c) Bilakah simpanan Johan dan Erika mempunyai perbezaan sebanyak RM30?
- (d) Bapa mereka berjanji akan memberikan hadiah kepada seorang daripada mereka yang mempunyai wang paling banyak selepas sebulan. Siapakah yang akan mendapat hadiah itu? Berikan justifikasi anda.



STANDARD PEMBELAJARAN

Menyelesaikan masalah yang melibatkan graf fungsi.

Penyelesaian:

Memahami masalah

- (a) Mengetahui pasti nilai wang yang disimpan pada hari ke-20.
- (b) Mengetahui pasti bilangan hari bagi jumlah simpanan yang sama bagi Johan dan Erika.
- (c) Menghitung perbezaan simpanan mereka sebanyak RM30.
- (d) Mengetahui pasti siapakah yang akan mendapat hadiah berdasarkan simpanan paling banyak dalam masa sebulan dengan memberikan justifikasinya.

Merancang strategi

- (a) Baca nilai y apabila $x = 20$ bagi graf Johan dan Erika.
- (b) Baca nilai x bagi titik persilangan dua garis tersebut.
- (c) Hitung perbezaan nilai sebanyak RM30 di antara dua garis tersebut.
- (d) Baca nilai y apabila bilangan hari ialah 30.

Melaksanakan strategi

- (a) Daripada graf, pada hari ke-20
 - (i) Simpanan Johan = RM80
 - (ii) Simpanan Erika = RM60
- (b) Nilai x bagi titik persilangan graf Johan dan Erika. Titik persilangan ialah (10, 40). Maka pada hari ke-10 jumlah simpanan Johan dan Erika adalah sama, iaitu RM40.
- (c) Pada hari ke-25, $\text{RM}100 - \text{RM}70 = \text{RM}30$.
- (d) Apabila $x = 30$, graf Erika, $y = \text{RM}80$; graf Johan, $y = \text{RM}120$. Maka, simpanan Johan lebih banyak.

Membuat kesimpulan

- (a) Jumlah wang yang disimpan pada hari ke-20 oleh
 - (i) Johan = RM80
 - (ii) Erika = RM60
- (b) Simpanan Johan dan Erika mempunyai jumlah yang sama pada hari ke-10.
- (c) Perbezaan simpanan mereka sebanyak RM30 adalah pada hari ke-25.
- (d) Johan akan mendapat hadiah daripada bapanya kerana pada hari ke-30 tabung Johan mempunyai RM120 manakala tabung Erika cuma mempunyai RM80 sahaja.

CONTOH 15

Dalam permainan animasi, kartun Jibam melompat dari sebuah blok batu. Pada masa yang sama, sebiji batu akan dibaling ke arahnya untuk menjatuhkan Jibam. Graf fungsi $y = 6 + x - x^2$ mewakili pergerakan Jibam dan graf fungsi $y = 2x$ mewakili pergerakan batu tersebut. y mewakili jarak dalam meter dan x ialah masa dalam saat.

Berdasarkan graf:

- (a) Apakah ketinggian maksimum lompatan Jibam?
- (b) Pada saat keberapakah batu itu tepat mengenai Jibam?
- (c) Pada saat keberapakah Jibam menyentuh permukaan tanah?

Penyelesaian:

Memahami masalah

- Fungsi $y = 6 + x - x^2$ mewakili lompatan Jibam. Fungsi $y = 2x$ mewakili balingan batu.
- Mengetahui pasti nilai ketinggian maksimum lompatan Jibam, masa batu mengenai Jibam dan masa Jibam sampai ke tanah.

Merancang strategi

- (a) Baca nilai ketinggian maksimum daripada graf $y = 6 + x - x^2$.
- (b) Baca nilai x bagi titik persilangan dua graf tersebut.
- (c) Baca nilai x jika $y = 0$.

Melaksanakan strategi

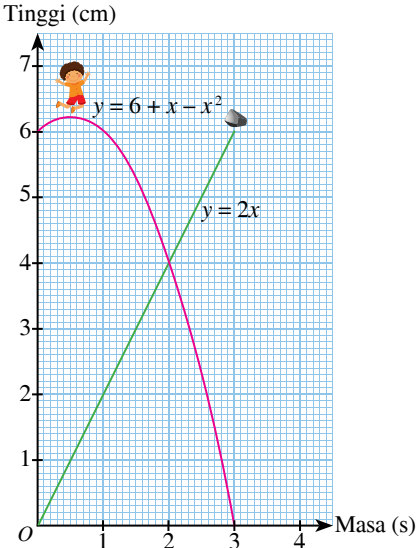
Daripada graf:

- (a) Titik maksimum ialah (0.5, 6.25), maka ketinggian maksimum ialah 6.25.
- (b) Nilai x ialah titik persilangan dua graf tersebut. Titik persilangan ialah (2, 4). Maka, batu itu mengenai Jibam pada saat ke-2.
- (c) $y = 0, x = 3$. Maka, Jibam akan menyentuh tanah pada saat ke-3.

Membuat kesimpulan

Maka:

- (a) Ketinggian maksimum lompatan Jibam ialah 6.25 meter.
- (b) Batu yang dibaling itu mengenai Jibam pada saat ke-2.
- (c) Jibam akan menyentuh tanah pada saat ke-3.



JOM CUBA 8.2

1. Salin dan lengkapkan jadual nilai berikut bagi fungsi yang diberikan.

(a) $y = 3x + 2$

x	0	1	2	3	4
y		5			14

(b) $y = 2x^2$

x	0	1	2	3	4
y			8	18	

(c) $y = x^3 + 2$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-6		2			

2. Bina jadual nilai bagi setiap fungsi yang berikut dengan menggunakan nilai x yang diberikan.

(a) $y = 2x - 2$ untuk $-3 \leq x \leq 3$

(b) $y = 2x^2 + x - 5$ untuk $-1 \leq x \leq 3$

(c) $y = 3x^3 - 6$ untuk $-2 \leq x \leq 4$

3. Salin dan lengkapkan jadual-jadual nilai di bawah mengikut fungsi yang diberikan, seterusnya lukis graf dengan skala yang dinyatakan.

(a) $y = 5 + x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2		4	5			8	9

Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = 5 + x$ untuk $-3 \leq x \leq 4$.

(b) $y = 4 - x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y		0			3	0	-5

Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = 4 - x^2$ untuk $-3 \leq x \leq 3$.

(c) $y = 8 - x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	35		9	8			-19

Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 10 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = 8 - x^3$ untuk $-3 \leq x \leq 3$.

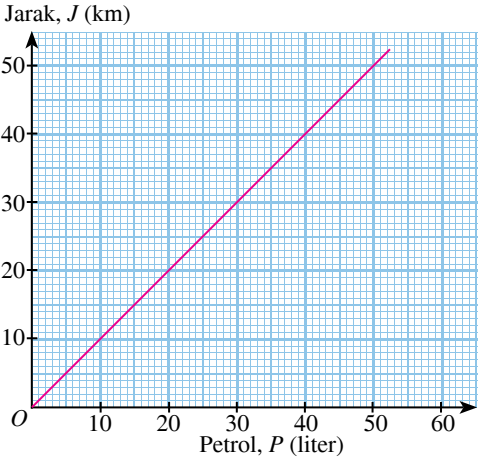
(d) $y = \frac{4}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4
y	-1	-1.33		-4	-8		4		1.33	

Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 2 unit pada paksi- y , lukis graf fungsi $y = \frac{4}{x}$ untuk $-4 \leq x \leq 4$.

4. Graf menunjukkan penggunaan petrol P liter yang digunakan oleh sebuah teksi bagi jarak J km. Berdasarkan graf:

- (a) Tentukan jarak teksi itu akan bergerak jika tangkinya diisi sebanyak
(i) 30 liter petrol. (ii) 42 liter petrol.
(b) Hitung kos petrol bagi pergerakan teksi sejauh 36 km jika 1 liter petrol bernilai RM2.30.



5. Diberi satu fungsi $y = 5x^2 - 9x - 5$.

(a) Lengkapkan jadual nilai di bawah bagi fungsi tersebut untuk $-2 \leq x \leq 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	33		-5	-9		

- (b) Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan skala 2 cm kepada 5 unit pada paksi- y , plotkan semua titik pada graf itu.
(c) Seterusnya, lukis graf fungsi itu.
(d) Daripada graf, tentukan nilai x apabila $y = 0$.

MENJANA KECEMERLANGAN

1. Tentukan sama ada setiap hubungan berikut ialah suatu fungsi atau bukan fungsi.
(a) $\{(0, 0), (1, 4), (2, 8), (3, 12)\}$
(b) $\{(25, 5), (25, -5), (9, 3), (9, -3)\}$
2. Wakilkan hubungan set yang diberikan dalam bentuk pasangan tertib, jadual, graf dan persamaan.
(a) Set integer, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Set gandaan dengan 11, $A = \{11, 22, 33, 44, 55\}$
(b) Set integer, $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Set kuasa dua sempurna, $S = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
3. Luas permukaan sebiji bola, L berbentuk sfera ialah hasil darab 4π dengan kuasa dua jejari, j .
(a) Nyatakan
(i) pemboleh ubah bersandar.
(ii) pemboleh ubah tak bersandar.
(b) Tulis hubungan antara L dengan j .
4. Diberi $T = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $U = \{1, 8, 27, 64\}$. Hubungan set T kepada set U ialah kuasa tiga. Wakilkan fungsi berikut menggunakan
(a) pasangan tertib (b) jadual (c) graf (d) persamaan

5. Bapa Amirah memberikan wang belanja kepadanya sebanyak RM100.

(a) Jika dia berbelanja sebanyak RM2 setiap hari, hitung baki wang selepas

- (i) 2 hari (ii) 5 hari (iii) 10 hari

(b) Diberi RMy mewakili baki wang Amirah selepas x hari. Lengkapi jadual nilai di bawah.

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y			70	60		40		20	10	

(c) Lukis graf bagi fungsi $y = 100 - 2x$ untuk $5 \leq x \leq 50$. Gunakan skala 2 cm kepada 10 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 10 unit pada paksi- y .

(d) Daripada graf:

- (i) Bilakah semua wang simpanan Amirah habis dibelanjakan?
(ii) Bilakah wang simpanan Amirah berbaki sebanyak RM44?

6. Wilson ingin membina sangkar arnabnya yang berbentuk segi empat tepat dengan lebar p meter dan panjang $3p$ meter. Jika A mewakili luas sangkar arnab itu, maka hubungan A dengan panjang dan lebar sisinya diwakili oleh $A = 3p^2$.

(a) Lengkapi jadual nilai di bawah bagi fungsi A untuk $0 \leq p \leq 6$.

p	0	1	2	3	4	5	6
A				27		75	108

(b) Lukis graf bagi fungsi A untuk $0 \leq p \leq 6$. Gunakan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi- x dan 2 cm kepada 10 unit pada paksi- y .

(c) Daripada graf, tentukan:

- (i) Luas kawasan sangkar arnab itu apabila lebarnya ialah 5.2 m.
(ii) Luas kawasan sangkar arnab sekiranya Wilson mempunyai dawai pagar sepanjang 40 m.

7. Raj ialah pengerusi Kelab Komputer. Dia ingin menempah kemeja-T untuk ahli kelab daripada Puan Aini, guru koperasi sekolah. Puan Aini telah menyediakan satu graf bagi menunjukkan kos dalam RM, dengan bilangan kemeja-T.

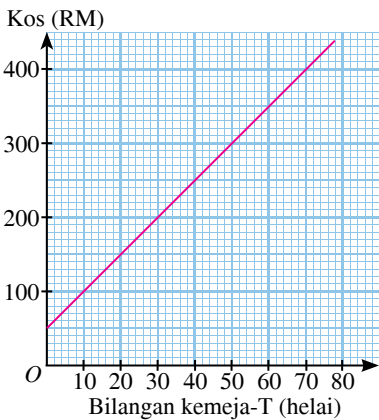
(a) Lengkapi jadual di bawah berdasarkan graf.

Bilangan kemeja-T	10	30	50	70
Kos (RM)				

(b) Setelah Raj mengamati graf tersebut, dia terkejut apabila mendapati 0 helai kemeja-T kosnya RM50. Jika anda ialah Puan Aini, apakah penjelasan anda?

(c) Berapakah jumlah kos yang perlu dibayar oleh Raj untuk 68 helai kemeja-T?

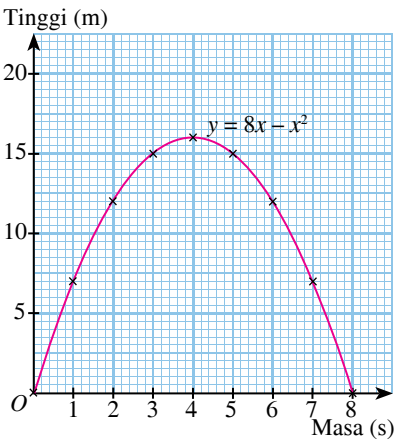
(d) Jika Raj cuma mempunyai bajet sebanyak RM410, nyatakan jumlah kemeja-T yang dapat ditempah olehnya.



8. Nizam memukul bola golf yang diberikan kepadanya. Ketinggian bola itu, y meter dari permukaan tanah selepas x saat ialah $y = 8x - x^2$. Graf di sebelah menunjukkan pergerakan bola golf itu setelah dipukul.

Berdasarkan graf:

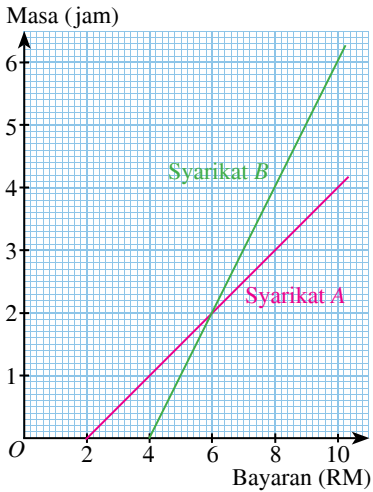
- (a) Berapakah ketinggian bola itu pada saat ke-3?
(b) Pada saat keberapakah bola itu berada di ketinggian 10 m.
(c) Pada saat keberapakah bola itu akan jatuh ke tanah?
(d) Apakah ketinggian maksimum yang dicapai oleh bola itu?
(e) Apakah trend bagi pergerakan bola golf itu?



9. Zarul ingin menyewa basikal untuk bersiar-siar di taman rekreasi. Terdapat dua buah kedai yang menawarkan perkhidmatan menyewa basikal di situ, iaitu Syarikat A dan Syarikat B. Graf menunjukkan kadar bayaran dan masa penggunaan basikal yang ditetapkan oleh kedua-dua buah syarikat itu.

Berdasarkan graf:

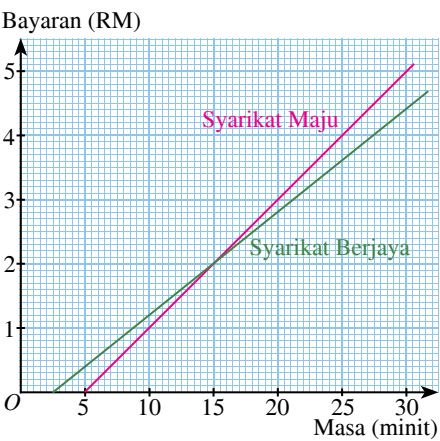
- (a) Berapakah bayaran yang dikenakan oleh Syarikat A bagi 3 jam penggunaan basikal itu?
(b) Jika Zarul ingin menyewa basikal untuk 1 jam sahaja, syarikat basikal yang manakah menawarkan harga yang lebih murah? Jelaskan jawapan anda.
(c) Zarul mempunyai RM7 sahaja. Basikal syarikat yang manakah harus dipilih oleh Zarul? Jelaskan.
(d) Untuk tempoh berapa jamkah bayaran sewa basikal bagi 2 buah syarikat itu adalah sama?
(e) Jika Zarul menyewa basikal selama 6 jam daripada Syarikat B, berapakah bayaran yang perlu dibayar oleh Zarul?



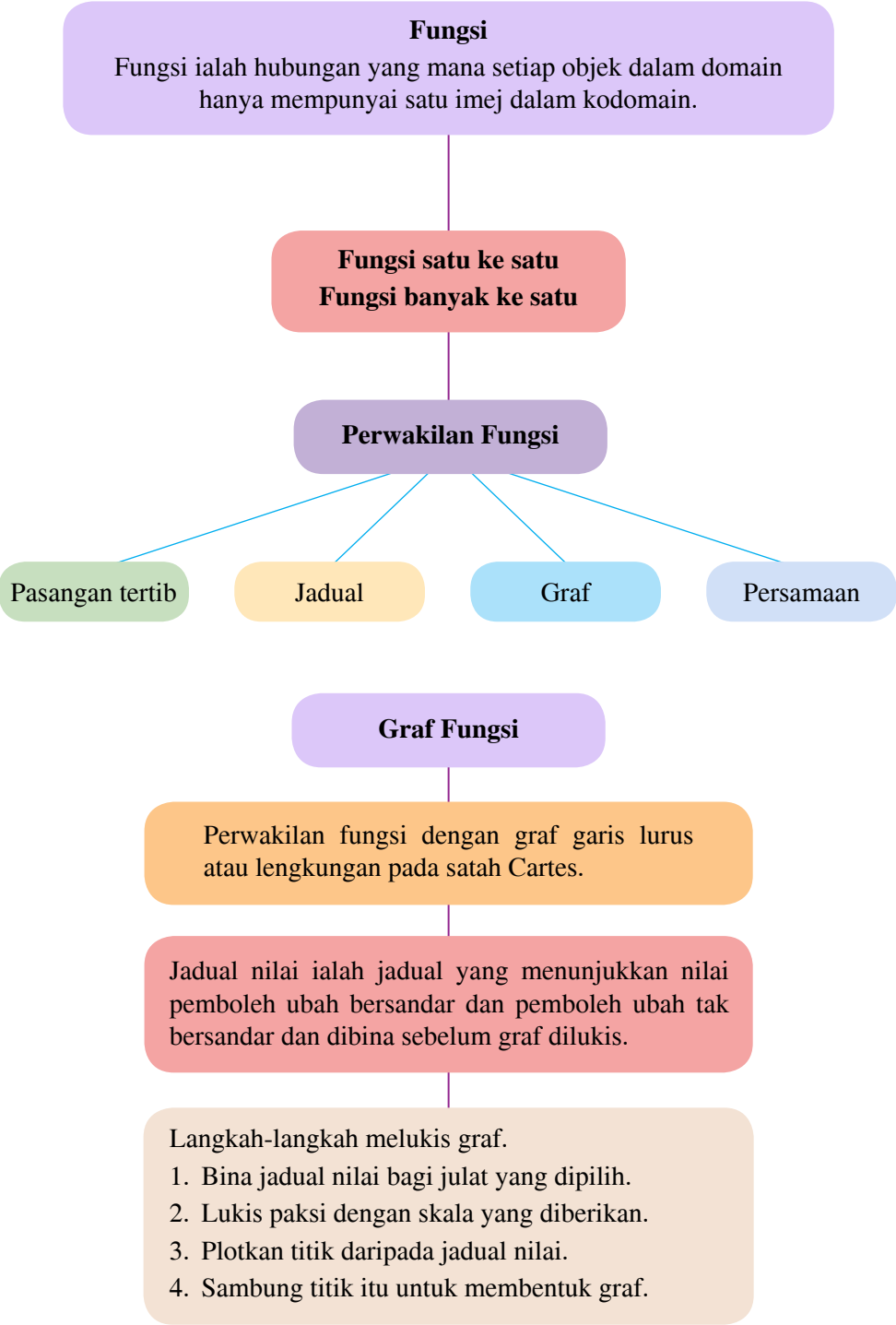
10. Syarikat Maju dan Syarikat Berjaya ialah dua syarikat telekomunikasi yang menawarkan pakej pelan prabayar telefon bimbit. Graf menunjukkan kadar bayaran dan masa perbualan yang ditawarkan oleh kedua-dua syarikat itu.

Berdasarkan graf:

- (a) Berapakah kadar bayaran bagi 20 minit perbualan bagi
(i) Syarikat Maju (ii) Syarikat Berjaya
(b) Jika Erin menggunakan telefon lebih daripada 30 minit untuk berbual sebulan, syarikat yang manakah menawarkan kadar bayaran yang lebih murah? Jelaskan.
(c) Umai hanya mahu membelanjakan RM4 sahaja untuk perkhidmatan itu. Syarikat manakah yang harus dipilih oleh Umai? Jelaskan.



INTI PATI BAB



REFLEKSI DIRI

Pada akhir bab ini, saya dapat:

1. Menerangkan maksud fungsi.	☐	☐	☐
2. Mengenal pasti fungsi dan memberikan justifikasi berdasarkan perwakilan fungsi dalam bentuk pasangan tertib, jadual, graf dan persamaan.	☐	☐	☐
3. Membina jadual nilai bagi fungsi linear dan bukan linear, dan seterusnya melukis graf dengan skala yang diberikan.	☐	☐	☐
4. Mentafsir graf fungsi.	☐	☐	☐

PROJEK MINI

Anda dikehendaki membuat satu tugas, iaitu menghasilkan kad ucapan dengan menggunakan corak fungsi yang diberikan. Lengkapkan jadual nilai di bawah. Lukis lapan graf fungsi di bawah pada sekeping kertas graf yang sama dengan skala 2 cm kepada 1 unit pada paksi-x dan 2 cm kepada 2 unit pada paksi-y. Labelkan setiap graf yang dilukis dengan fungsinya. Warnakan setiap rantau dengan warna-warna yang digemari. Selepas itu, gunting kertas graf itu mengikut ukuran yang anda pilih dan pastikan corak yang telah diwarnakan memenuhi kawasan. Lekatkan graf ini pada kad manila dan hias mengikut kreativiti anda untuk menjadikannya sebagai sekeping kad ucapan.



Contoh corak daripada beberapa graf fungsi

Bilangan	Fungsi (y)	x						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
1	$y = x$							
2	$y = -x + 9$							
3	$y = 2x + 8$							
4	$y = -2x + 4$							
5	$y = x^2 - 3$							
6	$y = -x^2 + 13$							
7	$y = -x^3 + 5$							
8	$y = 2x^{-2}$							